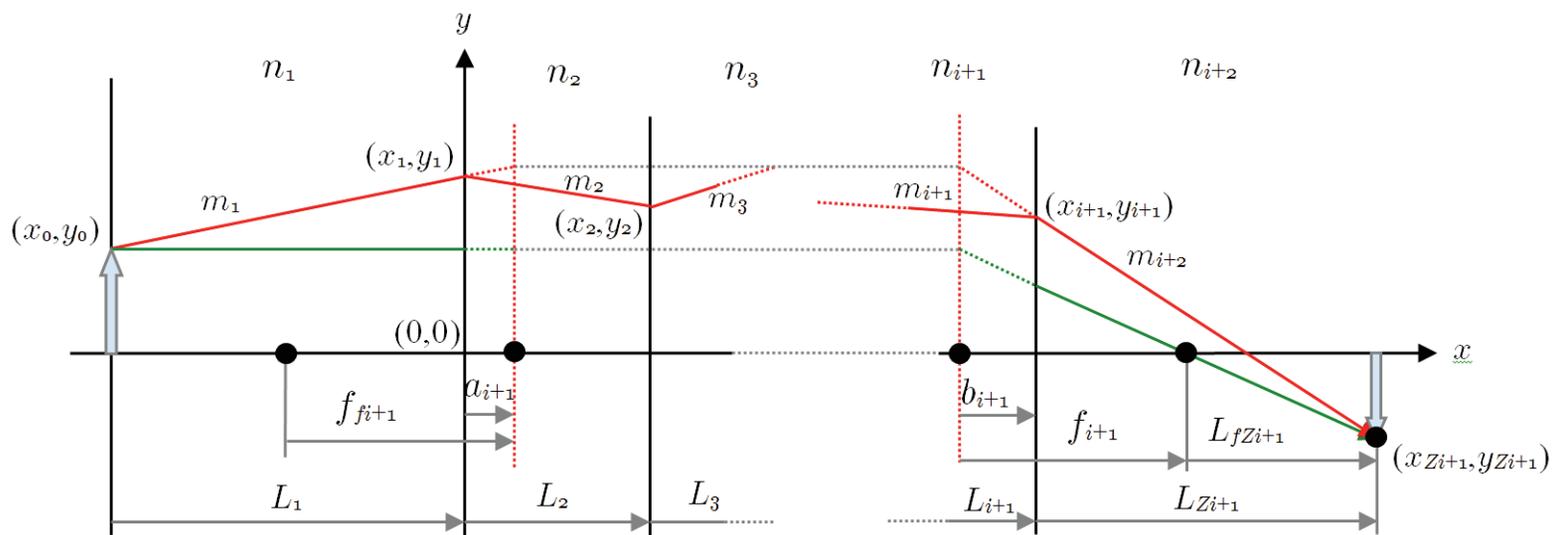


## 直線の方程式による近軸光線追跡

市原 淳

2016-07-28

一般の光学のテキストは幾何学に基づいており、通常の数学の表記法とは逆向きに角度を取るなど、慣れていない者にはわかりにくく、また主点の意味合いが書かれていないことも多い。この資料では、数学式表記に基づき  $x-y$  平面上で光線を  $y - y_i = m_i(x - x_i)$  と表して、直線の方程式による近軸光線追跡を行った。界面間隔を計算に含むため光軸上では焦点距離、主点位置、像位置、倍率が正確に求められる。界面数が多い場合は容易にレンズの曲率半径との関係式が求まり、像の位置・倍率から曲率半径への逆算ができる。顕微鏡などでは色収差の計算も可能となる。



Zitsu ジツ科学株式会社

<http://zitsu-scientific.co.jp/>

技術資料 2016-002

著者: 代表取締役 市原 淳

公開: 2016-07-28

## 目次

1	<b>近軸光線追跡</b>	3
1.1	2次元光線追跡 . . . . .	3
1.2	近軸光線追跡 . . . . .	3
2	<b>レンズの基本特性</b>	5
2.1	薄肉レンズ . . . . .	5
2.2	主点 . . . . .	7
3	<b>近軸光線追跡と主点位置などの計算</b>	9
3.1	近軸光線追跡式 . . . . .	9
3.2	近軸光線追跡による計算方法 . . . . .	9
3.3	界面数が1の場合の近軸光線追跡 . . . . .	13
3.4	界面数が <i>i</i> +1の場合の近軸光線追跡 . . . . .	14
3.5	レンズの基本式 . . . . .	19
3.6	逐次計算式 . . . . .	21
4	<b>近軸公式のまとめ</b>	24
5	<b>倍率などからの界面曲率半径の逆算</b>	28
5.1	倍率と物体位置からの逆算 . . . . .	28
5.2	倍率と像位置からの逆算 . . . . .	29
5.3	倍率、物体位置、像位置からの2変数の逆算 . . . . .	31
6	<b>近軸公式の使用例</b>	31
6.1	コリメートレンズ . . . . .	31
6.2	ルーペ（拡大鏡、虫めがね） . . . . .	32
6.3	反射鏡 . . . . .	34
6.4	裏面反射鏡 . . . . .	35
7	<b>単レンズ形状と色収差・ペッツバール和</b>	36
7.1	形状ファクター . . . . .	36
7.2	単レンズの色収差 . . . . .	37
7.3	単レンズのペッツバール和 . . . . .	38
8	<b>ルーペ・顕微鏡の色収差補正</b>	39
8.1	縦倍率 . . . . .	39
8.2	ルーペの角倍率色収差補正 . . . . .	40
8.3	顕微鏡の角倍率色収差補正 . . . . .	41
8.4	各波長の色収差バランス . . . . .	43
9	<b>複数のレンズ（隙間のある薄肉レンズ）で構成された光学系</b>	44

# 1 近軸光線追跡

## 1.1 2次元光線追跡

近軸近似での光線追跡の前に、 $x - y$  座標系で光線を直線の方程式で表した場合の、一般の2次元光線追跡の手順を確認する。

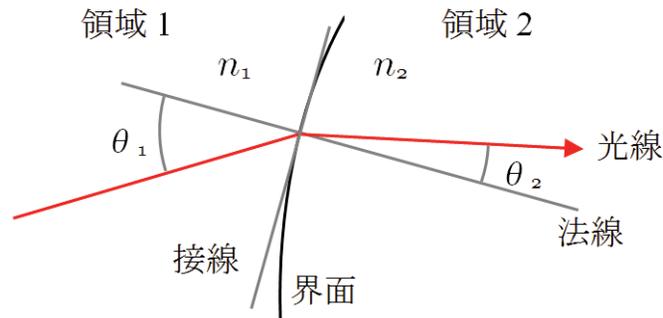


図 1.1 屈折率  $n_1$  の領域 1 と屈折率  $n_2$  の領域 2 の界面での光の屈折

光の屈折は**スネルの法則**により表される。 $n_1, n_2$  を各領域の屈折率とすると図 1.1 を参照して次のようになる。

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

これを使って、 $x - y$  座標系での2次元光線追跡式を求める手順は、領域 1 での光線の式を

$$y - y_0 = m_1(x - x_0)$$

とすると、図 1.2 を参照して次の手順で計算できる。

1. 領域 1 における光線の式と、界面 1 を表す式の交点  $(x_1, y_1)$  を求める。
2. 界面 1 の式を微分し、 $(x_1, y_1)$  における界面 1 の接線の傾きを求める。
3. 接線の傾きから、 $(x_1, y_1)$  における法線の式の傾きを求める。
4. 領域 1 における光線の傾きと法線の傾きから、 $\theta_1$  を求める。
5. スネルの法則により  $\theta_2$  を求める。
6.  $\theta_2$  と法線の傾きから、領域 2 における光線の傾き  $m_2$  を求める。

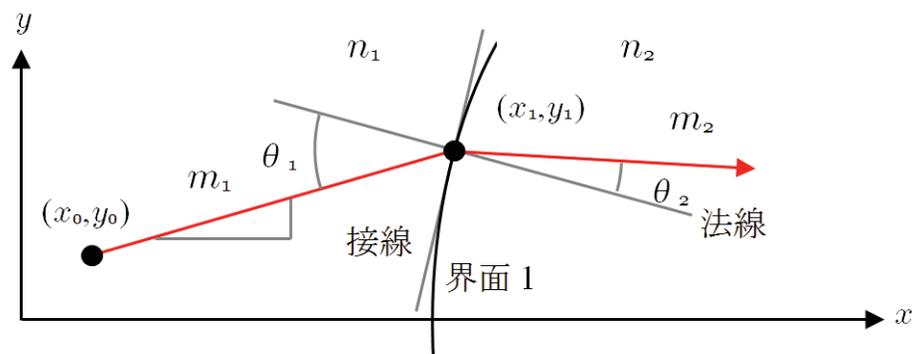


図 1.2  $x - y$  座標系における2次元光線追跡 ( $m$  は光線を表す直線の傾きを表す)

これにより、領域 2 での光線の式  $y - y_1 = m_2(x - x_1)$  が決まる。界面が複数ある場合、この手順を繰り返せば光線が追跡できる。(技術資料 2016-003「光線追跡と集束円錐曲面」参照)

## 1.2 近軸光線追跡

2次元光線追跡の手順に従って、光がほぼ光軸 ( $x$  軸) に沿って右に進み、 $y$  や  $m$  が非常に小さい場合の近軸近似の光線追跡式を求める。 $x$  方向の距離が重要であり  $x$  の絶対値は意味がないため、界面の頂点 ( $x$  軸上の点) を原点と

する。また、界面の曲率半径の中心は  $x$  軸上にあるものとする。(図 1.3 参照)

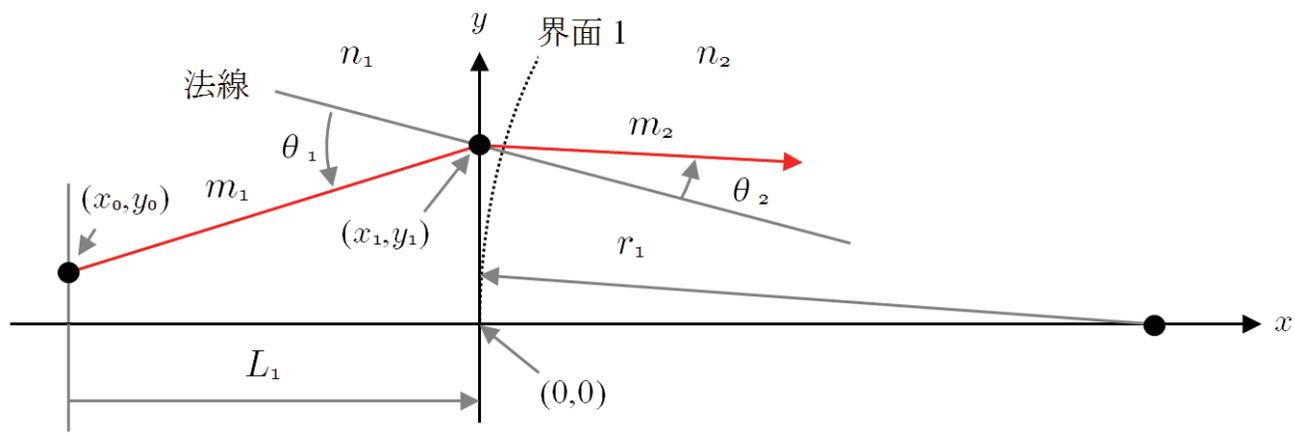


図 1.3  $x - y$  座標系での近軸光線追跡

一般の 2 次元光線追跡と同じ手順に従って近軸近似の光線追跡を行う。

1.  $x_1$  の値は本来は界面との交点の座標であるが、近軸のため界面の曲がりを見捨て、 $x$  軸上の界面の座標（ここでは原点）とする。光源から界面までの距離を距離  $L_1$  とすると、 $y_1$  は次のように近似される。

$$y_1 = m_1 L_1 + y_0$$

2. 界面を表す式を球面ではなく放物面で近似する。放物面でも頂点の曲率半径  $r_1$  で表現できる。 $x - y$  平面上での界面の式は次のようになる。

$$y^2 = 2r_1 x$$

ここで、界面が左に凸になるとき、 $r_1$  が正であるとする（後の計算で負号が出てきたりするが、混乱を避けるため光学の通常の見方と合わせた）。界面の式を  $y$  で微分すると、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{r_1}$$

したがって、 $(x_1, y_1)$  における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{r_1}{y_1}$$

3. これより、法線の傾きを  $m'$  とすると、接線と法線は直交するので

$$m' = -\frac{y_1}{r_1}$$

4. 一般に傾き  $m$  と  $m'$  の 2 直線の間を  $\theta$  とすると  $\tan\theta = (m - m')/(1 + mm')$  であるが、 $mm'$  が 1 より十分小さいとして分母を 1 と近似すると、

$$\tan\theta_1 = m_1 - m'$$

5. 近軸のため、スネルの法則の  $\sin\theta$  を  $\tan\theta$  で近似する。

$$n_1 \tan\theta_1 = n_2 \tan\theta_2$$

6.  $\tan\theta_2$  についても同様に近似すると  $\tan\theta_2 = m_2 - m'$  であるから、スネルの法則の近似式に代入し

$$n_1(m_1 - m') = n_2(m_2 - m')$$

$$m_2 - m' = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)(m_1 - m')$$

$$m_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)m_1 + \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2}\right)m' = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)m_1 - \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2}\right)\frac{y_1}{r_1}$$

これにより領域 2 における光線の式  $y - y_1 = m_2(x - x_1)$  が求まる。界面が複数ある場合、直前の界面と光線との交点を光源とみなし、同様に計算すればよい。界面  $i$  の場合に一般化すると、次の近軸光線追跡式が得られる。

$$y_i = m_i L_i + y_{i-1} \tag{1.1}$$

$$m_{i+1} = \left(\frac{n_i}{n_{i+1}}\right)m_i - \left(\frac{n_{i+1} - n_i}{n_{i+1}}\right)\frac{y_i}{r_i} \tag{1.2}$$

光が左に進むときは、通常の光学の取り扱いと同様に、距離と屈折率を負にすれば良い。 $n_2 = -n_1$  とすると、スネルの法則の近似式より

$$\theta_2 = -\theta_1$$

となり、図 1.4 のように反射を表すことがわかる。

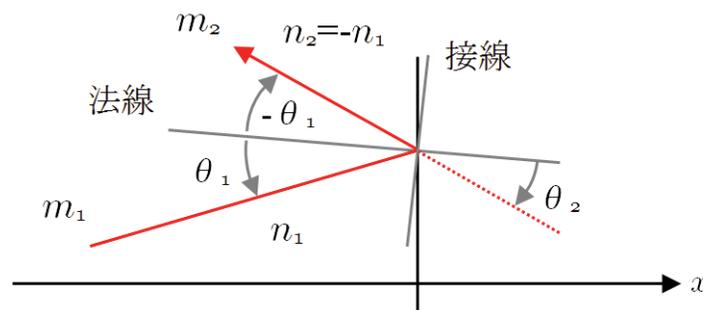


図 1.4 反射の場合の近軸光線追跡

なお、この直線の方程式による光線追跡では、光線の式は求まるが光線の進む方向は分からない。反射で方向が変わる場合には、別に検討し次の界面の位置を決める必要がある。

## 2 レンズの基本特性

第 1 節で求めた近軸光線追跡式を用いて代数計算で近軸追跡を行うが、その前に 2 つの界面がある場合で、近軸近似を行ったレンズの特性を見ておく。簡単のため、レンズ前後の屈折率が等しい（例えば空気）とする。

### 2.1 薄肉レンズ

近軸近似のもとで、2 つの界面の界面間の距離が無限に小さい理想的な仮想レンズを考えると、**薄肉レンズ**となる。界面間の距離が無限に小さいため、レンズに入射した光は同じ点から方向を変えて出てくるとみなせる。

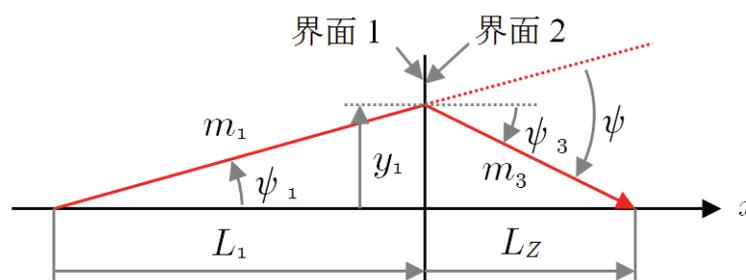


図 2.1 薄肉レンズ（界面 1 と 2 の間隔が無限に小さい）の近軸光線追跡

レンズの本質は、光が屈折により方向を変える割合（図 2.1 の角  $\psi$ ）が光軸からの距離  $y_1$  に比例することである。図 2.1 のように各変数を定義すると、 $\psi = \psi_3 - \psi_1$  であるが、近軸近似のため  $\varphi = \tan \varphi$  とすると、 $\psi_1$  と  $\psi_3$  の  $\tan$  は光線の傾き  $m$  のことであるから

$$\psi = m_3 - m_1$$

これが、 $y_1$  に比例するため、

$$F = \frac{m_3 - m_1}{y_1} \tag{2.1}$$

とすると、 $F$  は光源の位置によらずレンズによって決まるどれだけ方向を変えるかを表す定数となる。 $y_1 = m_1 L_1$  であるからこれを代入して

$$\frac{m_3 - m_1}{m_1 L_1} = F$$

$$\frac{m_3}{m_1} = FL_1 + 1$$

屈折後の光線が、界面から  $L_Z$  のところで光軸と交差するとして、 $y_1 + m_3 L_Z = 0$  より

$$m_1 L_1 + m_3 L_Z = 0$$

$$L_Z = -\frac{m_1}{m_3} L_1 \tag{2.2}$$

$$L_Z = -\frac{L_1}{FL_1 + 1} \tag{2.3}$$

これより、 $L_Z$  は  $m_1$  によらず光源からレンズまでの距離  $L_1$  とレンズの定数  $F$  のみによって決まることがわかる。つまり、光源からいろいろな角度で出た光がレンズを通った後  $L_Z$  の距離で一点に集まる。

なお、近軸近似を行っているため、光軸からわずかに離れた点から出た光の光軸との角度は小さく、集光する位置も (2.3) 式で近似できる。したがって物体の各点（物点）からの光がレンズから  $L_Z$  の位置に集束し像を作る。物点から出た光が屈折後集束する点を像点といい、像点を含む  $x$  軸に垂直な面を像面という。

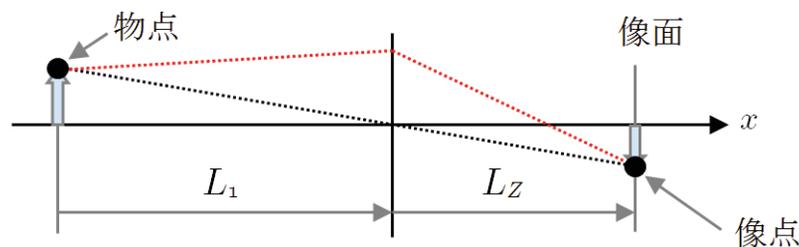


図 2.2 物点からの光がレンズを通り像面（近軸近似では平面とする）で集束する

(2.3) 式を変形すると

$$\frac{1}{L_Z} = -\frac{FL_1 + 1}{L_1} = -F - \frac{1}{L_1}$$

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_Z} = -F \tag{2.4}$$

ここで、入射光が平行光である場合を考える。(図 2.3 参照)

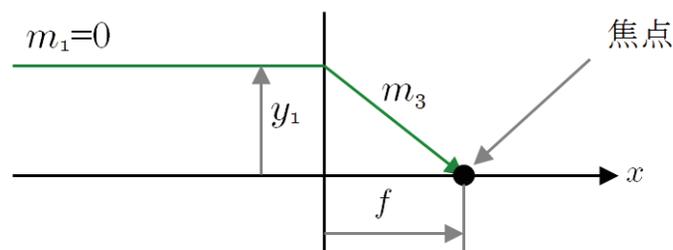


図 2.3 入射光が平行光の場合に屈折後集束する点が焦点である

このときに光が集束する点を**焦点**、レンズから焦点までの距離  $f$  を**焦点距離**という。これを用いると

$$y_1 + m_3 f = 0$$

$m_1 = 0$  であるから、(2.1) 式より

$$F = \frac{m_3}{y_1} = -\frac{1}{f} \tag{2.5}$$

となる。(2.5) 式を (2.4) 式に代入すると、薄肉レンズの基本公式 (ガウスの結像公式) が得られる。

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_Z} \tag{2.6}$$

## 2.2 主点

次に、2つの界面の距離が離れたレンズを、1つの薄肉レンズで表すことを考える。第1領域の光線の式 ( $y - y_0 = m_1(x - x_0)$ ) と、第3領域の光線の式 ( $y - y_2 = m_3(x - x_2)$ ) の交点の位置に薄肉レンズを置けば良いように思えるが、そうすると光源からレンズまでの距離  $L_1$  によって薄肉レンズの位置が変わってしまい (図 2.4 の赤と青)、一般の場合に適用することが出来ない。

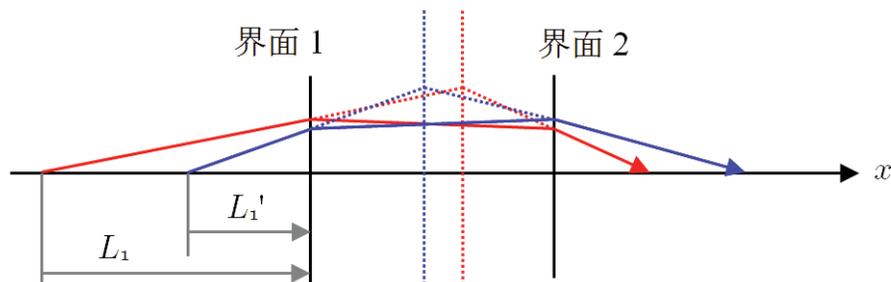


図 2.4 レンズを単純に薄肉レンズで置き換えると光源位置により薄肉レンズの位置も変わる

ここで、薄肉レンズを入射する面と出射する面の二つに分け、二つの面の間には隙間があるがこれを無視して、仮想入射面に入射した高さと同じ高さで仮想出射面から出射するレンズであると考える。(図 2.5 参照)

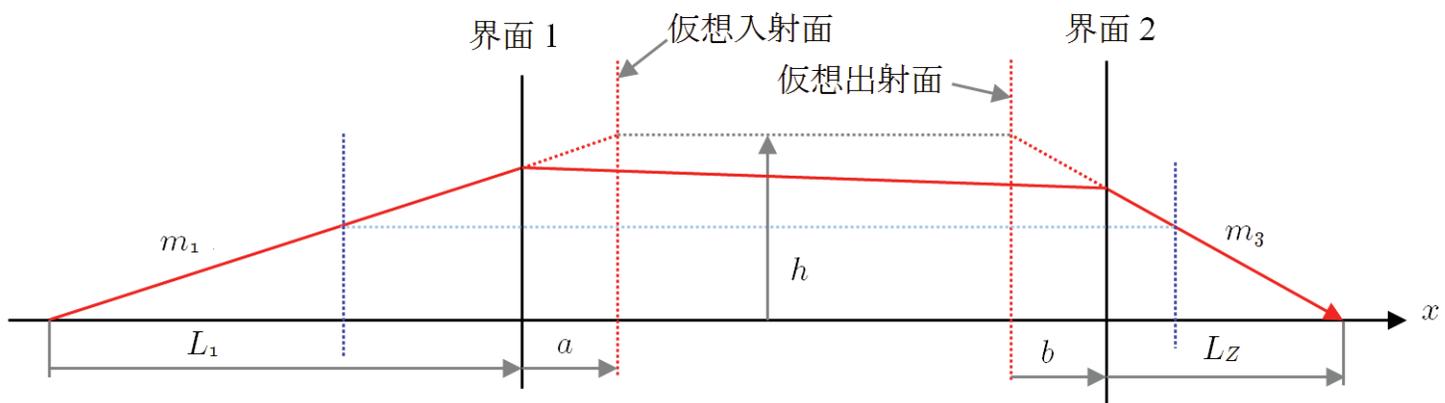


図 2.5 仮想入射面と仮想出射面を持つ薄肉レンズ

このように考えた場合、入射点と出射点の高さ  $h$  が同じであるから、入射界面から仮想入射面までの距離を  $a$ 、仮想入射面から出射界面までの距離を  $b$  とすると、

$$m_1(L_1 + a) = h$$

$$h + m_3(b + L_Z) = 0$$

であるから、

$$b + L_Z = -\frac{m_1}{m_3}(L_1 + a) \quad (2.7)$$

となり、薄肉レンズの (2.2) 式と同様に像を結ぶ位置 (仮想出射面からの距離) と、物体からレンズの仮想入射面までの距離の間関係が得られる。

このような、 $a, b$  の組み合わせは無数に考えられる (図 2.5 中の青線など) が、このような組み合わせの中で、 $a, b$  が共に  $L_1$  によらないものが存在する。このときの仮想面の  $x$  軸上の点が**主点**である。入射側を**前側主点**、出射側を**後側主点**という。主点を含む  $x$  軸に垂直な面を**主面**という。(図 2.6 参照)

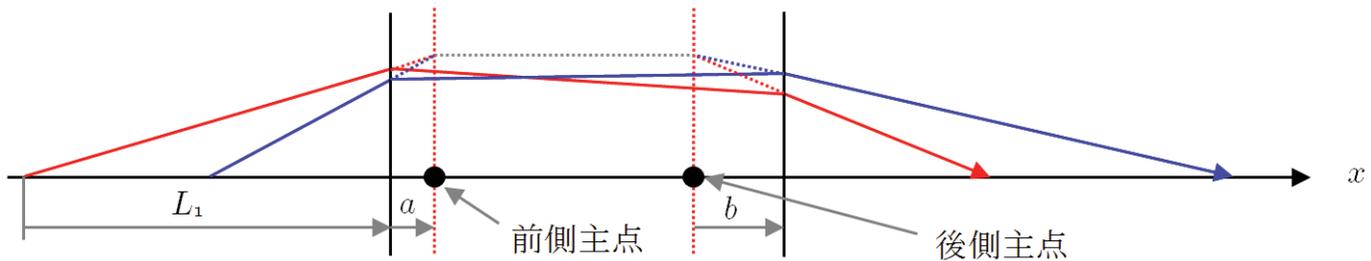


図 2.6 隙間のある薄肉レンズでは光源位置により変わらない仮想面の位置 (主点) が存在する

後側主点位置は通常は次のようにして求める。主点位置が  $L_1$  によらないということは、 $L_1$  が無限大つまり平行光でも成り立つ。

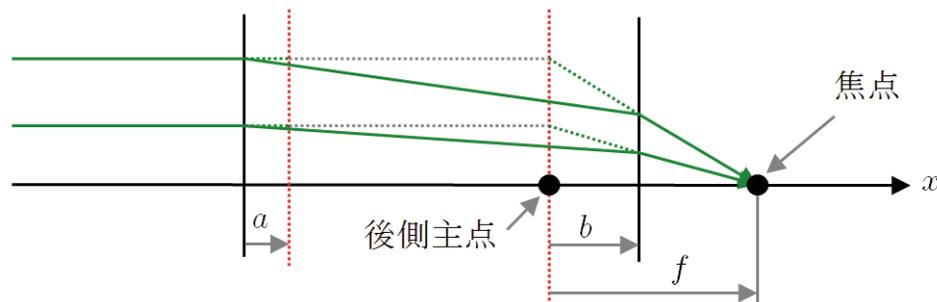


図 2.7 入射光を平行光にすると後側主点位置が求まる

このとき、入射光の光線の高さが  $x$  によらず一定となるため、後側主点は入射光の延長線と出射光の延長線の交点の  $x$  座標として一点に定まる。出射光の傾きが光線高さに比例するため、後側主点位置は光源の高さによらない (図 2.7 参照)。この後側主点を平行光でない一般の場合に適用すると、対応する前側主点も一点となる (通常は、前側主点は逆方向から平行光を入れた場合の後側主点として求めるとされているが、 $a, b$  は  $L_1$  によらないため、「出射光が平行光になる様な  $L_1$  を選んだ場合」、と考えることが出来る)。平行光を入射した場合の集光位置が**焦点**であり、後側主点から焦点までの距離が**焦点距離  $f$** である。

入射仮想面と出射仮想面の間に隙間があっても、前側主点位置と後側主点位置の光線の高さ  $h$  が同じであり、(2.1) 式の  $F$  はレンズで決まる定数であるから主点からの距離をとることにより薄肉レンズと同様に計算でき、

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_1 + a} + \frac{1}{b + L_Z} \quad (2.8)$$

となる。このように主点位置と焦点距離を使うことにより、離れた 2 界面を持つレンズ (厚さのあるレンズ) を、隙間を持った 1 つの薄肉レンズで表すことができる。(矛盾した言い回しだが、薄肉レンズと同等に扱えるという意味である。厚肉レンズということもあるが定義がはっきり決まっていないため、この資料では「隙間のある薄肉レンズ」とする。) 多数の界面を持つ複合レンズの場合でも 1 つの薄肉レンズとして扱えるため基本的な光学計算が容易になる。

### 3 近軸光線追跡と主点位置などの計算

#### 3.1 近軸光線追跡式

図 3.1 のように各領域を定義し近軸光線追跡を行う。なお、界面 1 の  $x$  座標  $x_1$  を 0 とする。

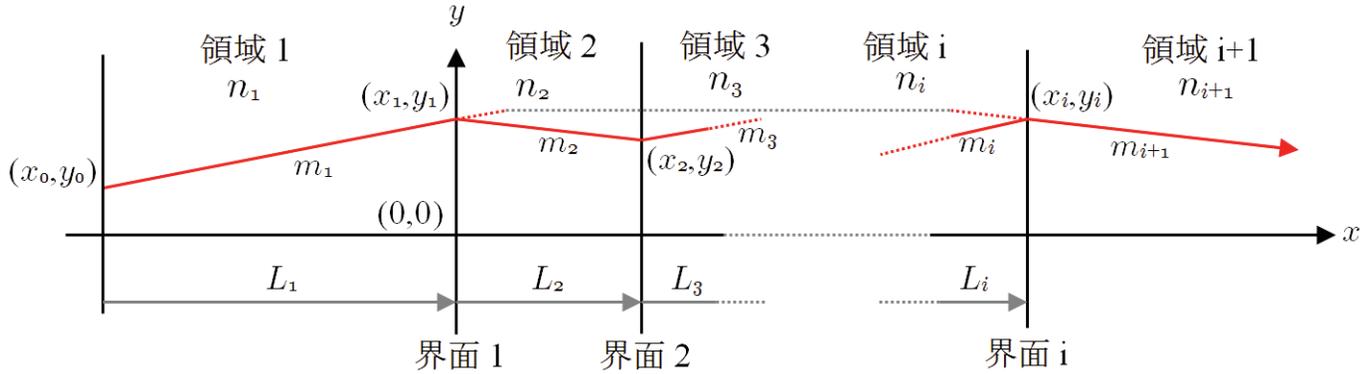


図 3.1 近軸光線追跡における定義

(1.1)(1.2) 式を用いて近軸光線追跡を行うが、後の計算途中で出てくるものも含め領域  $i$  における界面で決まる変数を次のように定義する。 $n_i$  は屈折率、 $L_i$  は界面間の距離、 $r_i$  は界面の曲率半径とする。

$$S_i = \frac{n_i}{n_{i+1}} \tag{3.1}$$

$$R_i = -\left(\frac{n_{i+1} - n_i}{n_{i+1}}\right) \frac{1}{r_i} \tag{3.2}$$

$$Q_i = L_i R_i \tag{3.3}$$

$$U_i = S_i + Q_i \tag{3.4}$$

これを用い、(1.1) 式も含め改めて記すと次の二つの式が**近軸追跡式**となる。

$$y_i = L_i m_i + y_{i-1} \tag{3.5}$$

$$m_{i+1} = S_i m_i + R_i y_i \tag{3.6}$$

ここで (3.6) 式の内容を見ておくと、右辺第一項は屈折率の異なる界面（平面）が存在することにより光線の傾きが変わることを示す。 $x$  軸に垂直な平面があった場合のスネルの法則の近軸近似式となっている。右辺第二項はその界面が曲面であることにより光が傾きを変え、その傾きの変化量が  $x$  軸からの距離（高さ）に比例することを示す。 $R_i$  は光学で良く使われるパワー  $\Phi$  と似ているが、 $\Phi_i = (n_{i+1} - n_i)/r_i$  であり、 $R_i$  はさらに  $n_{i+1}$  で割っていることと、符号が逆になっていることが異なる。符号が逆になっているのは、( $y$  が正のときに) 通常の光学の取り扱いでは光が収束する方向を正、数学の取り扱いでは直線の傾きが大きくなる方向、つまり光が発散する方向を正としているためである。

#### 3.2 近軸光線追跡による計算方法

最初に、2 界面の場合の近軸光線追跡を行い、主点位置などの計算方法を検討する。界面 1 における光線の高さは、

$$y_1 = L_1 m_1 + y_0 \tag{3.7}$$

領域 2 における光線の傾きは、

$$m_2 = S_1 m_1 + R_1 y_1 = S_1 m_1 + R_1 (L_1 m_1 + y_0) = S_1 m_1 + Q_1 m_1 + R_1 y_0$$

$$m_2 = U_1 m_1 + R_1 y_0 \quad (3.8)$$

同様に領域 3 における光線の傾きは、

$$m_3 = U_2 m_2 + R_2 y_1$$

となる。これに (3.7)(3.8) 式を代入し

$$m_3 = U_2 (U_1 m_1 + R_1 y_0) + R_2 (L_1 m_1 + y_0) = (U_1 U_2 + L_1 R_2) m_1 + (R_1 U_2 + R_2) y_0$$

ここで、

$$M_2 = U_1 U_2 + L_1 R_2 \quad (3.9)$$

$$F_2 = R_1 U_2 + R_2 \quad (3.10)$$

とすると ( $M, F$  の添字  $_2$  は界面数が 2 の場合を表す)、

$$m_3 = M_2 m_1 + F_2 y_0 \quad (3.11)$$

となる。一方、界面 2 における光線の高さは、

$$y_2 = L_2 m_2 + y_1 = L_2 (U_1 m_1 + R_1 y_0) + L_1 m_1 + y_0$$

$$y_2 = (L_1 + U_1 L_2) m_1 + R_1 L_2 y_0 + y_0 \quad (3.12)$$

となる。ここで

$$b_2 = \frac{R_1 L_2}{F_2} \quad (3.13)$$

とおくと

$$y_2 = (L_1 + U_1 L_2) m_1 + b_2 F_2 y_0 + y_0$$

となる。

これを用いて、領域 3 における光線の式を変形する。

$$\begin{aligned} y - y_2 &= m_3 (x - x_2) = m_3 (x - x_2 + b_2 - b_2) = m_3 (x - (x_2 - b_2)) - m_3 b_2 \\ &= m_3 (x - (x_2 - b_2)) - \frac{(M_2 m_1 + F_2 y_0) R_1 L_2}{F_2} = m_3 (x - (x_2 - b_2)) - \frac{R_1 L_2 M_2}{F_2} m_1 - R_1 L_2 y_0 \end{aligned}$$

$y_2$  を代入して、

$$y - ((L_1 + U_1 L_2) m_1 + R_1 L_2 y_0 + y_0) = m_3 (x - (x_2 - b_2)) - \frac{R_1 L_2 M_2}{F_2} m_1 - R_1 L_2 y_0$$

$$y - (L_1 + U_1 L_2) m_1 - y_0 = m_3 (x - (x_2 - b_2)) - \frac{R_1 L_2 M_2}{F_2} m_1$$

$$y - (L_1 + U_1 L_2 - \frac{R_1 L_2 M_2}{F_2}) m_1 - y_0 = m_3 (x - (x_2 - b_2))$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= y - (L_1 + \frac{(U_1 F_2 - R_1 M_2) L_2}{F_2}) m_1 - y_0 = y - (L_1 + \frac{(U_1 (R_1 U_2 + R_2) - R_1 (U_1 U_2 + L_1 R_2)) L_2}{F_2}) m_1 - y_0 \\ &= y - (L_1 + \frac{(U_1 R_2 - Q_1 R_2) L_2}{F_2}) m_1 - y_0 = y - (L_1 + \frac{S_1 Q_2}{F_2}) m_1 - y_0 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$a_2 = \frac{S_1 Q_2}{F_2} \tag{3.14}$$

とおくと、領域 3 における光線の式として

$$y - ((L_1 + a_2) m_1 + y_0) = m_3 (x - (x_2 - b_2)) \tag{3.15}$$

が得られる。

$h$  を領域 1 の光線を  $L_1 + a_2$  の位置まで延長したときの高さだとすると、 $h = (L_1 + a_2) m_1 + y_0$  であるから、この式により図 3.2 のように、「最初の界面から  $a_2$  の距離にある仮想面に入射した光が、領域 3 において、同じ高さの点  $(x_2 - b_2, h)$  から傾き  $m_3$  で出てくる」とみなせることがわかる。つまり隙間のある薄肉レンズに置き換えられる。

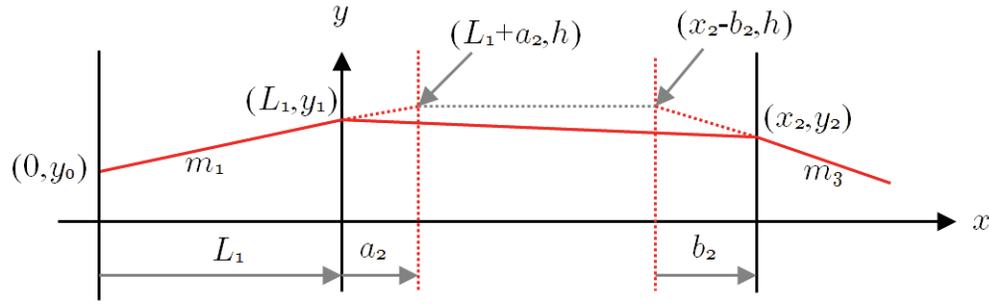


図 3.2 領域 1 の光線を  $L_1 + a_2$  まで延長した高さと同じ高さから領域 3 の光線が出てくるとみなせる

そして、 $a_2, b_2$  および  $F_2$  の式 (3.14)(3.13)(3.10) には  $L_1$  が含まれておらず、 $a_2, b_2$  が共に  $L_1$  に依存しないことから  $a_2, b_2$  が主点位置までの距離を示している。

ここで、入射光が平行光の場合を見ておくと、 $m_1 = 0$  の場合であるから、(3.11)(3.15) 式より

$$m_3 = F_2 y_0$$

$$y - y_0 = m_3 (x - (x_2 - b_2))$$

図 3.3 のように焦点距離を  $f_2$  とすると、 $(x_2 - b_2 + f_2, 0)$  の点が焦点であるからこれを代入して、

$$-y_0 = F_2 y_0 (x_2 - b_2 + f_2 - (x_2 - b_2))$$

$$-1 = F_2 f_2$$

$$f_2 = -\frac{1}{F_2} \tag{3.16}$$

となる。

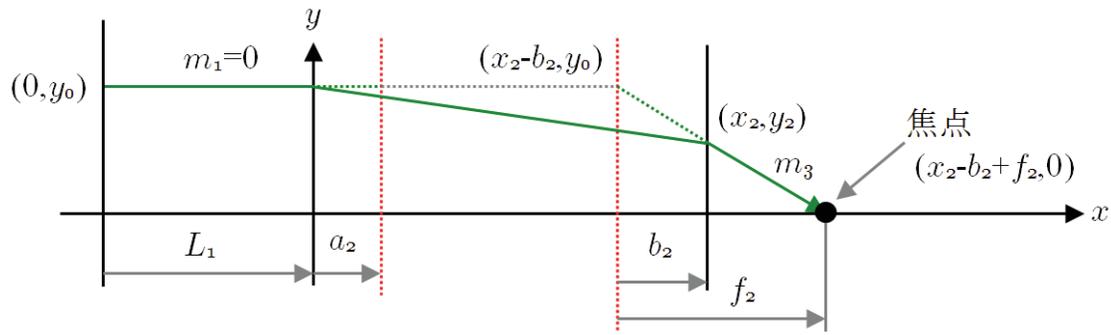


図 3.3 入射光が平行光の場合の各点の座標

次に、

$$L_{Z2} = -\frac{(L_1 + a_2)}{M_2} - b_2 \quad (3.17)$$

とにおいて  $x_{Z2} = x_2 + L_{Z2}$  での光線の高さ  $y_{Z2}$  を調べる。(3.17) 式は、 $y_0 = 0$  の場合には (3.11) 式より  $M_2 = m_3/m_1$  となるから、 $b_2 + L_{Z2} = -(m_3/m_1)(L_1 + a_2)$  となり、レンズの結像位置を示す (2.7) 式と同じになる。(3.15) 式に、 $x_{Z2}, y_{Z2}$  を代入すると

$$\begin{aligned} y_{Z2} - ((L_1 + a_2)m_1 + y_0) &= m_3(x_2 + L_{Z2} - (x_2 - b_2)) \\ &= m_3\left(-\frac{L_1 + a_2}{M_2} - b_2 + b_2\right) = -\frac{m_3(L_1 + a_2)}{M_2} \\ y_{Z2} - y_0 &= (L_1 + a_2)m_1 - \frac{m_3(L_1 + a_2)}{M_2} = \frac{(L_1 + a_2)(m_1M_2 - m_3)}{M_2} \end{aligned}$$

(3.11) 式より  $M_2m_1 = m_3 - F_2y_0$  であるから、

$$\begin{aligned} y_{Z2} - y_0 &= \frac{(L_1 + a_2)(m_3 - F_2y_0 - m_3)}{M_2} = -\frac{(L_1 + a_2)F_2y_0}{M_2} \\ y_{Z2} &= y_0 - \frac{(L_1 + a_2)F_2y_0}{M_2} = \frac{y_0(M_2 - (L_1 + a_2)F_2)}{M_2} \end{aligned}$$

(3.14) 式を代入して

$$y_{Z2} = \frac{y_0(M_2 - (L_1 + \frac{S_1Q_2}{F_2})F_2)}{M_2} = \frac{y_0(M_2 - L_1F_2 - S_1Q_2)}{M_2}$$

(3.9)(3.10) 式を代入して

$$\begin{aligned} y_{Z2} &= \frac{y_0(U_1U_2 + L_1R_2 - L_1(R_1U_2 + R_2) - S_1Q_2)}{M_2} \\ &= \frac{y_0(U_1U_2 - Q_1U_2 - S_1Q_2)}{M_2} = \frac{y_0(S_1U_2 - S_1Q_2)}{M_2} = \frac{S_1S_2y_0}{M_2} \end{aligned}$$

(3.1) 式を用いると

$$y_{Z2} = \left(\frac{n_1}{n_3}\right) \frac{y_0}{M_2} \quad (3.18)$$

が得られる。

$M_2$  はレンズの特性と  $L_1$  で決まるため ((3.9) 式参照)、(3.18) 式には  $m_1$  が含まれず、光源  $(x_0, y_0)$  からいろいろな方向に出た光がレンズを通った後  $(x_{Z2}, y_{Z2})$  に集束することを示している。したがって  $L_{Z2}$  が界面 2 から像面までの距離を示し、この位置に像が出来ることがわかる。(図 3.4 参照)

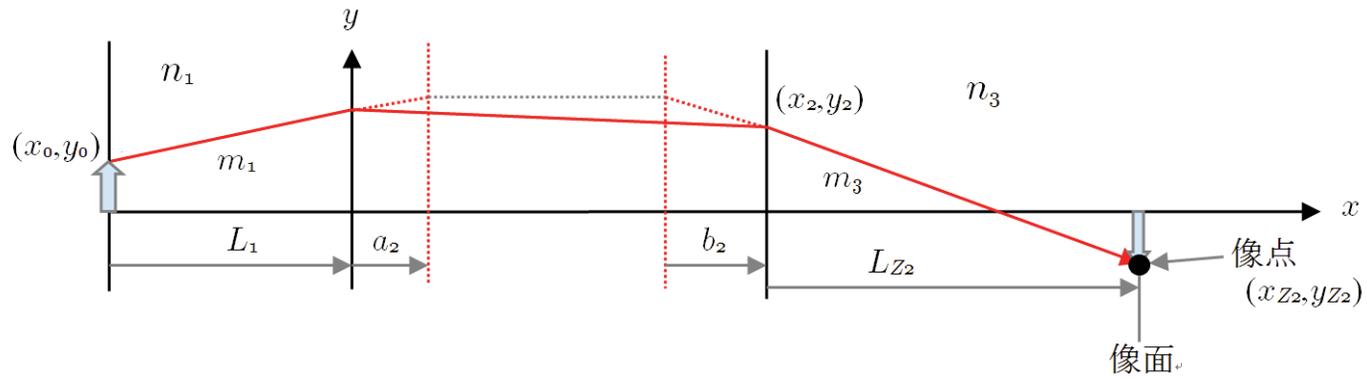


図 3.4 界面 2 から  $L_{Z2}$  の距離に像ができる

(3.18) 式で  $y_0 = 0$  のとき  $y_{Z2} = 0$  となることから、像の倍率（横倍率）を  $\beta_2$  とすると

$$\beta_2 = \frac{y_{Z2}}{y_0} = \left(\frac{n_1}{n_3}\right) \frac{1}{M_2} \quad (3.19)$$

となる。

### 3.3 界面数が 1 の場合の近軸光線追跡

界面数が増えた場合も、2 界面と同様の計算を行えば主点位置等が計算できるが、式の変形が大変になる。そこで、界面数  $i+1$  の場合を界面数  $i$  の場合から求める逐次計算を行う。まず初期値となる界面数 1 の場合を確認しておく。(3.7)(3.8) 式をもう一度書くと、

$$y_1 = L_1 m_1 + y_0$$

$$m_2 = U_1 m_1 + R_1 y_0$$

ここで、

$$M_1 = U_1 \quad (3.20)$$

$$F_1 = R_1 \quad (3.21)$$

とすると、

$$m_2 = M_1 m_1 + F_1 y_0 \quad (3.22)$$

界面が 1 つなので、界面の位置に隙間なしの薄肉レンズを置いた場合と考えられるため、

$$b_1 = 0 \quad (3.23)$$

$$a_1 = 0 \quad (3.24)$$

領域 2 における光線の式は、

$$y - y_1 = m_2(x - L_1)$$

$$y - (L_1 m_1 + y_0) = m_2(x - L_1) \quad (3.25)$$

入射光が平行光 ( $m_1 = 0$ ) の場合、(3.22) 式より、

$$m_2 = F_1 y_0$$

これを代入して、

$$y - y_0 = F_1 y_0 (x - L_1)$$

$f_1$  を焦点距離とすると  $x = L_1 + f_1$  のとき、 $y = 0$  であるから

$$-y_0 = F_1 y_0 (L_1 + f_1 - L_1)$$

$$f_1 = -\frac{1}{F_1} = -\frac{1}{R_1} \quad (3.26)$$

となる。

次に、

$$L_{Z1} = -\frac{L_1 + a_1}{M_1} - b_1$$

とすると、(3.23)(3.24) 式より

$$L_{Z1} = -\frac{L_1}{M_1}$$

$x = x_{Z1} = x_1 + L_{Z1}$  のとき  $y = y_{Z1}$  として、これを (3.25) 式に代入し界面数 2 の場合と同様に变形すると

$$y_{Z1} - (L_1 m_1 + y_0) = m_2 (x_{Z1} - L_1)$$

$$y_{Z1} = \frac{S_1 y_0}{M_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \frac{y_0}{M_1}$$

が得られる。よって、像の倍率  $\beta_1$  は

$$\beta_1 = \frac{y_{Z1}}{y_0} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \frac{1}{M_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \frac{1}{U_1} \quad (3.27)$$

となる。

### 3.4 界面数が $i+1$ の場合の近軸光線追跡

ここから、界面数  $i+1$  の場合に一般化を行う。近軸追跡の基本式 (3.5)(3.6) をもう一度書くと

$$y_i = L_i m_i + y_{i-1}$$

$$m_{i+1} = S_i m_i + R_i y_i$$

であるが、ここで

$$y_i = (L_1 + A_i) m_1 + (B_i + 1) y_0 \quad (3.28)$$

$$m_{i+1} = M_i m_1 + F_i y_0 \quad (3.29)$$

とおく。 $A_i, B_i, M_i, F_i$  の添字  $i$  については界面数が  $i$  であるときの値を示す。

$i = 1$  の場合、

$$y_1 = m_1(L_1 + A_1) + y_0B_1 + y_0$$

$$m_2 = M_1m_1 + F_1y_0$$

となるが、(3.7) 式と比較して、

$$A_1 = 0 \tag{3.30}$$

$$B_1 = 0 \tag{3.31}$$

また、(3.20)(3.21) 式より

$$M_1 = U_1 \tag{3.32}$$

$$F_1 = R_1 \tag{3.33}$$

となる。なお、 $i = 2$  の場合、同様に (3.12) 式と比較して、

$$A_2 = U_1L_2$$

$$B_2 = R_1L_2$$

(3.9)(3.10) 式より

$$M_2 = U_1U_2 + L_1R_2$$

$$F_2 = R_1U_2 + R_2$$

である。

界面数  $i+1$  の場合 (3.5) 式より

$$y_{i+1} = L_{i+1}m_{i+1} + y_i$$

であるが、これに (3.28)(3.29) 式を代入して、

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= L_{i+1}(M_im_1 + F_iy_0) + (L_1 + A_i)m_1 + y_0B_i + y_0 \\ &= ((L_1 + A_i + L_{i+1}M_i)m_1 + (B_i + L_{i+1}F_i)y_0 + y_0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

一方、(3.28) 式より

$$y_{i+1} = (L_1 + A_{i+1})m_1 + B_{i+1}y_0 + y_0 \tag{3.35}$$

であるので、(3.34)(3.35) 式を比較すると、

$$A_{i+1} = A_i + L_{i+1}M_i \tag{3.36}$$

$$B_{i+1} = B_i + L_{i+1}F_i \tag{3.37}$$

と出来る。

次に (3.6) 式より

$$m_{i+2} = S_{i+1}m_{i+1} + R_{i+1}y_{i+1}$$

これに (3.29)(3.35) 式を代入して、

$$\begin{aligned} m_{i+2} &= S_{i+1}(M_i m_1 + F_i y_0) + R_{i+1}((L_1 + A_{i+1})m_1 + y_0 B_{i+1} + y_0) \\ &= (S_{i+1}M_i + R_{i+1}L_1 + R_{i+1}A_{i+1})m_1 + S_{i+1}F_i y_0 + R_{i+1}y_0 B_{i+1} + R_{i+1}y_0 \end{aligned}$$

(3.36)(3.37) 式を代入して、

$$\begin{aligned} m_{i+2} &= (S_{i+1}M_i + R_{i+1}L_1 + R_{i+1}(A_i + L_{i+1}M_i))m_1 + S_{i+1}F_i y_0 + R_{i+1}y_0(B_i + L_{i+1}F_i) + R_{i+1}y_0 \\ &= (U_{i+1}M_i + R_{i+1}(L_1 + A_i))m_1 + (U_{i+1}F_i + R_{i+1}(B_i + 1))y_0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

(3.29) 式より、

$$m_{i+2} = M_{i+1}m_1 + F_{i+1}y_0 \quad (3.39)$$

であるので、(3.38)(3.39) 式を比較すると、

$$M_{i+1} = U_{i+1}M_i + R_{i+1}(L_1 + A_i) \quad (3.40)$$

$$F_{i+1} = U_{i+1}F_i + R_{i+1}(B_i + 1) \quad (3.41)$$

と出来る。

ここで、

$$b_{i+1} = \frac{B_{i+1}}{F_{i+1}} \quad (3.42)$$

とおくと、領域  $i+2$  における光線の式は

$$\begin{aligned} y - y_{i+1} &= m_{i+2}(x - x_{i+1}) = m_{i+2}(x - x_{i+1} + b_{i+1} - b_{i+1}) \\ &= m_{i+2}(x - (x_{i+1} - b_{i+1})) - m_{i+2}b_{i+1} = m_{i+2}(x - (x_{i+1} - b_{i+1})) - (M_{i+1}m_1 + F_{i+1}y_0)b_{i+1} \\ &= m_{i+2}(x - (x_{i+1} - b_{i+1})) - M_{i+1}b_{i+1}m_1 - B_{i+1}y_0 \end{aligned}$$

(3.35) 式を代入し、

$$y - ((L_1 + A_{i+1})m_1 + B_{i+1}y_0 + y_0) = m_{i+2}(x - (x_{i+1} - b_{i+1})) - M_{i+1}b_{i+1}m_1 - B_{i+1}y_0$$

$$y - (L_1 + A_{i+1} - M_{i+1}b_{i+1})m_1 - y_0 = m_{i+2}(x - (x_{i+1} - b_{i+1}))$$

さらに、

$$a_{i+1} = A_{i+1} - M_{i+1}b_{i+1} \quad (3.43)$$

とおくと

$$y - ((L_1 + a_{i+1})m_1 + y_0) = m_{i+2}(x - (x_{i+1} - b_{i+1})) \quad (3.44)$$

となる。

これにより 2 界面の場合と同様に、仮想入射面と同じ高さの仮想出射面から光が出てくるとみなせる。ここで、 $a_{i+1}$  に  $L_1$  が含まれないか確認する。

(3.43) 式を変形すると

$$a_{i+1} = A_{i+1} - M_{i+1}b_{i+1} = A_{i+1} - \frac{M_{i+1}B_{i+1}}{F_{i+1}} = \frac{F_{i+1}A_{i+1} - M_{i+1}B_{i+1}}{F_{i+1}}$$

この式に、(3.36)(3.37)(3.40)(3.41) 式を代入すると、途中を省略するが、

$$a_{i+1} = \frac{S_{i+1}(A_i F_i - M_i B_i) + R_{i+1}(A_i - L_1 B_i) + Q_{i+1}(M_i - L_1 F_i)}{F_{i+1}} \quad (3.45)$$

となる。(3.43)(3.42) 式より、

$$\begin{aligned} a_i &= A_i - M_i b_i \quad (3.46) \\ &= \frac{A_i F_i - M_i B_i}{F_i} \end{aligned}$$

これを用いると (3.45) 式は、

$$a_{i+1} = \frac{S_{i+1}F_i a_i + R_{i+1}(A_i - L_1 B_i) + Q_{i+1}(M_i - L_1 F_i)}{F_{i+1}} \quad (3.47)$$

となる。

ここで

$$C_i = A_i - L_1 B_i \quad (3.48)$$

$$D_i = M_i - L_1 F_i \quad (3.49)$$

とすると、(3.47) 式は

$$a_{i+1} = \frac{S_{i+1}F_i a_i + R_{i+1}C_i + Q_{i+1}D_i}{F_{i+1}} = \frac{S_{i+1}F_i a_i + R_{i+1}(C_i + L_{i+1}D_i)}{F_{i+1}} \quad (3.50)$$

となる。一方 (3.48) 式より、

$$\begin{aligned} C_{i+1} &= A_{i+1} - L_1 B_{i+1} = A_i + L_{i+1}M_i - L_1(B_i + L_{i+1}F_i) \\ &= A_i - L_1 B_i + L_{i+1}(M_i - L_1 F_i) = C_i + L_{i+1}D_i \end{aligned} \quad (3.51)$$

(3.49) 式より

$$\begin{aligned} D_{i+1} &= M_{i+1} - L_1 F_{i+1} = U_{i+1}M_i + R_{i+1}(L_1 + A_i) - L_1(U_{i+1}F_i + R_{i+1}(B_i + 1)) \\ &= U_{i+1}M_i - L_1 U_{i+1}F_i + R_{i+1}A_i - L_1 R_{i+1}B_i = U_{i+1}D_i + R_{i+1}C_i \end{aligned} \quad (3.52)$$

となる。(3.51) 式を (3.50) 式に代入して

$$a_{i+1} = \frac{S_{i+1}F_i a_i + R_{i+1}C_{i+1}}{F_{i+1}}$$

となる。

この式は逐次計算であるが、(3.33) 式のとおり  $F_1 = R_1$ 、また界面数  $i$  は 1 以上なので、(3.37)(3.41) 式より  $F_{i+1}$  に  $L_1$  は含まれない。また、(3.30)(3.31)(3.32)(3.33) 式と (3.48)(3.49) 式より  $C_1 = 0$ 、 $D_1 = S_1$  であり、やはり  $i$  は 1 以上なので、(3.51)(3.52) 式より、 $C_{i+1}$  にも  $L_1$  は含まれない。(3.24) 式のとおり  $a_1 = 0$  なので、結局  $a_{i+1}$  には  $L_1$  が含まれないことになる。 $b_{i+1}$  にも  $L_1$  は含まれないから、 $a_{i+1}, b_{i+1}$  が主点までの距離を示す。

入射光が平行光線の場合を見ておく。 $m_1 = 0$  の場合であるから、(3.29)(3.44) 式より界面数  $i+1$  の場合、

$$m_{i+2} = F_{i+1}y_0$$

$$y - y_0 = m_{i+2}(x - (x_{i+1} - b_{i+1}))$$

界面数  $i+1$  の場合の全体での焦点距離を  $f_{i+1}$  とすると、 $(x_{i+1} - b_{i+1} + f_{i+1}, 0)$  の点が焦点であるからこれを代入して、

$$-y_0 = F_{i+1}y_0(x_{i+1} - b_{i+1} + f_{i+1} - (x_{i+1} - b_{i+1}))$$

より

$$f_{i+1} = -\frac{1}{F_{i+1}} \quad (3.53)$$

となる。

次に、

$$L_{Z_{i+1}} = -\frac{L_1 + a_{i+1}}{M_{i+1}} - b_{i+1} \quad (3.54)$$

とおいて  $x_{Z_{i+1}} = x_{i+1} + L_{Z_{i+1}}$  での光線の高さ  $y_{Z_{i+1}}$  を調べる。(3.44) 式に、 $x_{Z_{i+1}}, y_{Z_{i+1}}$  を代入すると

$$y_{Z_{i+1}} - (L_1 + a_{i+1})m_1 - y_0 = m_{i+2}(x_{Z_{i+1}} - (x_{i+1} - b_{i+1}))$$

$$y_{Z_{i+1}} - y_0 = \frac{(L_1 + a_{i+1})(m_1 M_{i+1} - m_{i+2})}{M_{i+1}}$$

(3.39) 式より  $M_{i+1}m_1 = m_{i+2} - F_{i+1}y_0$  であるから、

$$y_{Z_{i+1}} - y_0 = \frac{(L_1 + a_{i+1})(m_{i+2} - F_{i+1}y_0 - m_{i+2})}{M_{i+1}}$$

より

$$y_{Z_{i+1}} = \frac{y_0(M_{i+1} - (L_1 + a_{i+1})F_{i+1})}{M_{i+1}} \quad (3.55)$$

(3.40)(3.41)(3.42)(3.43) 式を代入すると、途中を省略して

$$y_{Z_{i+1}} = \frac{y_0 S_{i+1}(M_i - L_1 F_i - A_i F_i + M_i B_i)}{M_{i+1}}$$

(3.42) 式より  $b_i = B_i/F_i$ 、(3.46) 式より  $a_i = A_i - M_i b_i$  を用いると

$$y_{Z_{i+1}} = \frac{y_0 S_{i+1}(M_i - (L_1 + a_i)F_i)}{M_{i+1}} \quad (3.56)$$

となる。

ここで

$$T_i = M_i - (L_1 + a_i)F_i \quad (3.57)$$

とすると、(3.55) 式は

$$y_{Z_{i+1}} = \frac{T_{i+1}y_0}{M_{i+1}} \quad (3.58)$$

となる。(3.56)(3.58) 式を比べ

$$T_{i+1} = S_{i+1}T_i$$

であるが、 $i = 1$  のとき (3.57) 式に (3.24)(3.32)(3.33) を代入し

$$T_1 = S_1$$

となるので、

$$T_{i+1} = S_1 S_2 \cdots S_{i+1} = \frac{n_1}{n_{i+2}} \quad (3.59)$$

(3.59) 式を (3.58) 式に代入し、

$$y_{Z_{i+1}} = \left(\frac{n_1}{n_{i+2}}\right) \frac{y_0}{M_{i+1}}$$

この式には  $m_1$  は含まれないため、 $L_{Z_{i+1}}$  が像のできる位置を示し、界面数  $i+1$  のときの像の倍率  $\beta_{i+1}$  は

$$\beta_{i+1} = \frac{y_{Z_{i+1}}}{y_0} = \left(\frac{n_1}{n_{i+2}}\right) \frac{1}{M_{i+1}} \quad (3.60)$$

となる。

なお  $b_{i+1} + L_{Z_{i+1}}$  が負になった場合、 $\beta_{i+1}$  は領域  $i+2$  で光が右に進んでいるときは虚像の倍率を表し、反射して光が左に進んでいるときは、実像の倍率を表す。

### 3.5 レンズの基本式

この資料の定義によるレンズの基本式を確認する。これまでに導いた界面数  $i+1$  の場合の式を界面数  $i$  の場合に直して検討する。(3.57) 式より

$$F_i(L_1 + a_i) = M_i - T_i$$

$$F_i = \frac{M_i}{L_1 + a_i} - \frac{T_i}{L_1 + a_i} \quad (3.61)$$

一方、(3.54) 式を変形すると

$$\frac{1}{b_i + L_{Z_i}} = -\frac{M_i}{L_1 + a_i} \quad (3.62)$$

となる。(3.53) 式と (3.61)(3.62) 式より、

$$\frac{1}{f_i} = -F_i = \frac{1}{b_i + L_{Z_i}} + \frac{T_i}{L_1 + a_i}$$

となる。(3.59) 式を用いるとレンズの基本式が得られる。

$$\frac{1}{f_i} = \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{1}{L_1 + a_i} + \frac{1}{b_i + L_{Z_i}} \quad (3.63)$$

近軸近似レンズの基本式を調べた (2.8) 式は  $n_1 = n_3$  の場合であるが、(3.63) 式は (2.1) 式の代わりに、

$$F = \frac{m_3 - \left(\frac{n_1}{n_3}\right)m_1}{y_1}$$

とおいた場合に相当する。 $n_1 \neq n_3$  でレンズが平面 (屈折率の異なる界面) であると仮定した場合の領域 3 の光線の傾きを  $m'_3$  とすると、スネルの法則の近軸近似式は  $n_1 m_1 = n_3 m'_3$  となるから、

$$F = \frac{m_3 - m'_3}{y_1}$$

となり、 $F$  はレンズが曲面であることによる傾きの変化が光源からの距離によらず一定であることを示している。

(3.57) 式に (3.53)(3.59) を用いると

$$M_i = \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) - \frac{L_1 + a_i}{f_i} \quad (3.64)$$

となるため、 $L_1 + a_i = (n_1/n_{i+1})f_i$  とすると、 $M_i = 0$  となる。この場合に (3.39) 式より  $y_0 = 0$  から出た光は平行光 ( $m_{i+1} = 0$ ) となり、**前側焦点距離**  $f_{fi}$  はこのときの  $L_1 + a_i$  であるから

$$f_{fi} = \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)f_i \quad (3.65)$$

となる。この式からわかるように最初と最後の屈折率が異なると、後側と前側の焦点距離が異なる。文献によっては、焦点距離として空气中換算焦点距離  $(f_i/n_{i+1}) = (f_{fi}/n_1)$  を用いているものもあるが、この資料では実際の値 (後側焦点距離) を焦点距離  $f_i$  としている。

その他のレンズの基本となる式を調べる。(3.54) 式より

$$M_i = -\frac{L_1 + a_i}{b_i + L_{Zi}}$$

(3.60) 式に代入し倍率は

$$\beta_i = -\left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\frac{b_i + L_{Zi}}{L_1 + a_i} \quad (3.66)$$

となる。

レンズの基本式 (3.63) と倍率の式 (3.66) から、像の位置あるいは物体の位置の式が導かれる。(3.63) 式の両辺に  $(b_i + L_{Zi})$  を掛けると

$$\frac{b_i + L_{Zi}}{f_i} = \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\frac{b_i + L_{Zi}}{L_1 + a_i} + 1$$

(3.66) 式を用いると

$$\frac{b_i + L_{Zi}}{f_i} = 1 - \beta_i$$

$L_{Zi}$  について解くと像位置が、

$$L_{Zi} = (1 - \beta_i)f_i - b_i \quad (3.67)$$

であることがわかる。

また、(3.63) 式の両辺に  $(L_1 + a_i)/(n_1/n_{i+1})$  を掛けると

$$\frac{L_1 + a_{i+1}}{\left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)f_i} = 1 + \frac{L_1 + a_i}{\left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)(b_i + L_{Zi})} = 1 - \frac{1}{\beta_i}$$

$$L_1 = \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right)f_i - a_i \quad (3.68)$$

となり、特定の倍率にするためには物体をどこにおけばよいか分かる。

焦点位置からの距離との関係を調べておく。後側焦点から像面までの距離を  $L_{fZ_i}$  とすると

$$f_i + L_{fZ_i} = b_i + L_{Z_i}$$

であるから、(3.67) 式を代入して

$$f_i + L_{fZ_i} = b_i + (1 - \beta_i)f_i - b_i$$

$$L_{fZ_i} = -\beta_i f_i \quad (3.69)$$

となる。この式から後側焦点位置から像面までの距離と、像の倍率が比例することかわかる。

### 3.6 逐次計算式

(3.36)(3.37)(3.40)(3.41) 式により逐次計算を行い、それを (3.42)(3.43)(3.53)(3.60) 式により変換することで焦点距離や主点位置などがわかるが、分かりやすくするため逐次計算を  $f_i$  や  $b_i$  などで表す。

焦点距離  $f_{i+1}$  については、(3.41) 式と (3.42) 式より

$$F_{i+1} = U_{i+1}F_i + R_{i+1}(b_i F_i + 1)$$

(3.53) 式を用いると

$$-\frac{1}{f_{i+1}} = \left(-\frac{1}{f_i}\right)U_{i+1} + \left(-\frac{b_i}{f_i}\right)R_{i+1} + R_{i+1} \quad (3.70)$$

この式は代数式の逐次計算に向いている。変形すると

$$f_{i+1} = \frac{f_i}{U_{i+1} - (f_i - b_i)R_{i+1}} \quad (3.71)$$

となる。 $U_{i+1} = S_{i+1} + L_{i+1}R_{i+1}$  であり、 $(f_i - b_i)$  は界面から焦点までの距離であるから

$$f_{i+1} = \frac{f_i}{(S_{i+1} + (\text{焦点から次の界面までの距離})R_{i+1})}$$

であることがわかる。平面での屈折率比による変化分と、次の界面が焦点位置より近いかわるか遠いかおよび曲率半径の正負で焦点距離が増えるか減るかが変わる。なお、 $f_i$  は非常に大きな値になることがあり (3.71) 式では桁落ちが起これるため、数値計算でも (3.70) 式で  $(-1/f_i)$  と  $(-b_i/f_i)$  を用いて逐次計算を行い  $f_i$  になおす方がよい。このとき  $(-1/f_i) = 0$  になると ( $f_i = \infty$  の場合) 計算エラーになるため、例えば  $f_i = 1 \times 10^{100}$  とする。(計算に用いる変数の型で決まる制限による)

後側主点位置  $b_{i+1}$  については、(3.37) 式と (3.42) 式より

$$b_{i+1}F_{i+1} = b_i F_i + L_{i+1}F_i$$

(3.53) 式を用いると

$$-\frac{b_{i+1}}{f_{i+1}} = \left(-\frac{b_i}{f_i}\right) + \left(-\frac{1}{f_i}\right)L_{i+1} \quad (3.72)$$

これを変形すると、次のようになる。

$$b_{i+1} = (b_i + L_{i+1})\left(\frac{f_{i+1}}{f_i}\right) \quad (3.73)$$

ここでも、数値は  $(-b_{i+1}/f_{i+1})$  を逐次計算し  $b_{i+1}$  は  $(-b_{i+1}/f_{i+1})/(-1/f_i)$  で計算する。 $(-1/f_i) = 0$  のときは  $b_{i+1} = 1 \times 10^{100}$  とするが、 $(-b_{i+1}/f_{i+1}) = 0$  のときは  $(-1/f_i)$  によらず  $b_{i+1} = 0$  とする。

次に倍率  $\beta_{i+1}$  について、(3.40) 式と (3.43) 式より

$$M_{i+1} = U_{i+1}M_i + R_{i+1}(L_1 + a_i + M_i b_i) = (U_{i+1} + R_{i+1}b_i)M_i + R_{i+1}(L_1 + a_i)$$

(3.60) 式を用いると

$$\begin{aligned} \left(\frac{n_1}{n_{i+2}}\right)\frac{1}{\beta_{i+1}} &= \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\frac{U_{i+1} + R_{i+1}b_i}{\beta_i} + R_{i+1}(L_1 + a_i) \\ \frac{1}{\beta_{i+1}} &= \left(\frac{n_{i+2}}{n_{i+1}}\right)\frac{U_{i+1} + R_{i+1}b_i}{\beta_i} + \left(\frac{n_{i+2}}{n_1}\right)R_{i+1}(L_1 + a_i) \end{aligned} \quad (3.74)$$

一方、(3.68) 式より

$$L_1 + a_i = \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right)f_i \quad (3.75)$$

これを (3.74) 式に代入し

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_{i+1}} &= \left(\frac{n_{i+2}}{n_{i+1}}\right)\frac{(U_{i+1} + R_{i+1}b_i)}{\beta_i} + \left(\frac{n_{i+2}}{n_1}\right)R_{i+1}\left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right)f_i \\ &= \frac{(U_{i+1} + R_{i+1}b_i + R_{i+1}(\beta_i - 1)f_i)}{S_{i+1}\beta_i} = \frac{\left(\frac{U_{i+1} - (f_i - b_i)R_{i+1}}{f_i} + R_{i+1}\beta_i\right)f_i}{S_{i+1}\beta_i} \end{aligned}$$

(3.71) 式を用いて

$$\frac{1}{\beta_{i+1}} = \frac{\left(\frac{1}{f_{i+1}} + R_{i+1}\beta_i\right)f_i}{S_{i+1}\beta_i} = \frac{\left(\left(\frac{1}{\beta_i}\right)\left(\frac{f_i}{f_{i+1}}\right) + f_i R_{i+1}\right)}{S_{i+1}} \quad (3.76)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{S_{i+1}}{f_i\left(\frac{1}{\beta_i f_{i+1}} + R_{i+1}\right)} \quad (3.77)$$

となる。

前側主点位置  $a_{i+1}$  は、(3.36) 式と (3.43) 式より

$$a_{i+1} + M_{i+1}b_{i+1} = a_i + M_i b_i + L_{i+1}M_i$$

$$a_{i+1} = a_i + (b_i + L_{i+1})M_i - b_{i+1}M_{i+1}$$

(3.60) 式を用いると

$$a_{i+1} = a_i + \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\frac{b_i + L_{i+1}}{\beta_i} - \left(\frac{n_1}{n_{i+2}}\right)\frac{b_{i+1}}{\beta_{i+1}} = a_i + \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\left(\frac{b_i + L_{i+1}}{\beta_i} - \frac{S_{i+1}b_{i+1}}{\beta_{i+1}}\right)$$

(3.76) 式を代入して

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= a_i + \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\left(\frac{b_i + L_{i+1}}{\beta_i} - b_{i+1}\left(\left(\frac{1}{\beta_i}\right)\left(\frac{f_i}{f_{i+1}}\right) + f_i R_{i+1}\right)\right) \\ &= a_i + \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\left(\frac{b_i + L_{i+1}}{\beta_i} - \frac{b_{i+1}\left(\frac{f_i}{f_{i+1}}\right)}{\beta_i} - f_i R_{i+1}b_{i+1}\right) \end{aligned}$$

(3.73) 式を用いると

$$a_{i+1} = a_i + \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\left(\frac{b_i + L_{i+1}}{\beta_i} - \frac{b_i + L_{i+1}}{\beta_i} - f_i R_{i+1}b_{i+1}\right) = a_i - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)f_i R_{i+1}b_{i+1}$$

$$= a_i - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) f_i R_{i+1} (b_i + L_{i+1}) \left(\frac{f_{i+1}}{f_i}\right) = a_i - \frac{\left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) (b_i + L_{i+1}) R_{i+1}}{\left(\frac{1}{f_{i+1}}\right)} \quad (3.78)$$

となる。代数式の計算は途中の式を変形し、

$$-\frac{a_{i+1}}{f_{i+1}} = \frac{\left(-\frac{a_i}{f_i}\right) \left(-\frac{1}{f_{i+1}}\right) + \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \left(-\frac{b_{i+1}}{f_{i+1}}\right) R_{i+1}}{\left(-\frac{1}{f_i}\right)} \quad (3.79)$$

これに、次の関係式を用いれば計算できる。

$$\frac{n_1}{n_{i+1}} = S_1 S_2 \cdots S_i$$

このように、 $a_{i+1}$  の逐次計算式は  $f_i$  と  $b_{i+1}$  から計算でき、 $\beta$  は含まれない。つまり、 $a_{i+1}$  は  $L_1$  によらないことが再確認された。数値計算を行う場合、(3.78) 式は  $a_i$  が非常に大きな値であった場合に桁落ちが起こる。このため、 $a_{i+1}$  は別の方法で計算する。

先に、像位置  $L_{Z_{i+1}}$  について検討する。1 界面のときを考えると、 $a_1 = b_1 = 0$  であるからレンズの基本式は、(3.63) 式より

$$\frac{1}{f_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_{Z1}}$$

$$L_{Z1} = \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \frac{1}{L_1}}$$

$1/f_1 = -R_1$ 、 $n_1/n_2 = S_1$  であるから

$$L_{Z1} = \frac{1}{-R_1 - \frac{S_1}{L_1}} \quad (3.80)$$

界面  $i$  までの光学系でできた像の  $x$  座標を  $x_i + L_{Zi}$  とし、この像を  $x_i + L_{i+1}$  の位置にある界面  $i+1$  で転写する場合を考えると、 $L_{Z1} \rightarrow L_{Z_{i+1}}$ 、 $R_1 \rightarrow R_{i+1}$ 、 $S_1 \rightarrow S_{i+1}$ 、 $L_1 \rightarrow L_{i+1} - L_{Zi}$ 、と置き換えればよいので、

$$L_{Z_{i+1}} = \frac{1}{-R_{i+1} - \frac{S_{i+1}}{L_{i+1} - L_{Zi}}} = \frac{1}{\frac{S_{i+1}}{L_{Zi} - L_{i+1}} - R_{i+1}} \quad (3.81)$$

なお、 $L_{i+1} = L_{Zi}$  のとき（前の像が界面位置にあるとき） $L_{Z_{i+1}} = 0$ 、 $(L_{Zi} - L_{i+1})R_{i+1} = S_{i+1}$  のとき  $L_{Z_{i+1}} = 1 \times 10^{100}$  とする。代数式の逐次計算には、(3.81) 式を変形して

$$L_{Z_{i+1}} = -\frac{L_{i+1} - L_{Zi}}{S_{i+1} + (L_{i+1} - L_{Zi})R_{i+1}} \quad (3.82)$$

$$-L_{Z_{i+1}} = \frac{(-L_{Zi}) + L_{i+1}}{U_{i+1} + (-L_{Zi})R_{i+1}} \quad (3.83)$$

初期値は (3.80) 式より

$$-L_{Z1} = \frac{L_1}{U_1} \quad (3.84)$$

である。なお、計算すると  $-L_{Z_{i+1}}$  を表す代数式の分母は  $(n_1/n_{i+2})/\beta_{i+1}$  になるため、具体的な界面数の場合の代数式は  $-L_{Z_{i+1}}/\beta_{i+1}$  で表した方がわかりやすい。

$L_{Z_{i+1}}$  を用いると、 $a_{i+1}$  の数値計算式は、レンズの基本式 (3.63) より

$$\frac{1}{f_{i+1}} = \left(\frac{n_1}{n_{i+2}}\right) \frac{1}{L_1 + a_{i+1}} + \frac{1}{b_{i+1} + L_{Z_{i+1}}}$$

$$\frac{1}{f_{i+1}} - \frac{1}{b_{i+1} + L_{Zi+1}} = \left(\frac{n_1}{n_{i+2}}\right) \frac{1}{L_1 + a_{i+1}}$$

$$a_{i+1} = \left(\frac{n_1}{n_{i+2}}\right) \frac{1}{\frac{1}{f_{i+1}} - \frac{1}{b_{i+1} + L_{Zi+1}}} - L_1 = \left(\frac{n_1}{n_{i+2}}\right) \frac{f_{i+1}}{1 + (1/((-b_{i+1}/f_{i+1}) + L_{Zi+1}(-1/f_{i+1})))} - L_1 \quad (3.85)$$

この式は  $L_1$  が大きな値のとき桁落ちする。しかし  $a_{i+1}$  は  $L_1$  によらないため、 $L_1$  の値は任意でよいので、実際の  $L_{Zi+1}$  とは別に  $L_1 = 0$  の場合の  $L_{Zi+1}$  を計算しておき ( $L_{ZZi+1}$  とする)、これを使って  $a_{i+1}$  を計算すればよい。

$$L_{ZZi+1} = \frac{1}{\frac{S_{i+1}}{L_{ZZi} - L_{i+1}} - R_{i+1}} \quad (3.86)$$

$$L_{ZZ1} = 0 \quad (3.87)$$

$$a_{i+1} = \left(\frac{n_1}{n_{i+2}}\right) \frac{f_{i+1}}{1 + (1/((-b_{i+1}/f_{i+1}) + L_{ZZi+1}(-1/f_{i+1})))} \quad (3.88)$$

ただし、 $(-b_{i+1}/f_{i+1}) = -L_{ZZi+1}(-1/f_{i+1})$  のとき (像位置が後側主点位置のとき)  $a_{i+1} = 0$ 、 $(-b_{i+1}/f_{i+1}) + L_{ZZi+1}(-1/f_{i+1}) = -1$  のとき (像位置が焦点位置のとき)  $a_{i+1} = 1 \times 10^{100}$  とする。(3.88) 式は逐次計算式ではないので、 $a_i$  の値が大きくなっても次の界面の計算には影響しない。

$\beta_{i+1}$  の数値計算についても、逐次計算ではなく (3.66) 式を用いる。

$$\beta_i = -\left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{b_i + L_{Zi}}{L_1 + a_i}$$

$L_1 + a_i = 0$  のときは、 $\beta_i = 1 \times 10^{100}$  とする。代数式の計算については (3.75) 式より界面数  $i+1$  の場合について、

$$\frac{1}{\beta_{i+1}} = \left(\frac{n_{i+2}}{n_1}\right) \left(\left(\frac{n_1}{n_{i+2}}\right) - \frac{L_1 + a_{i+1}}{f_{i+1}}\right) = \left(\frac{n_{i+2}}{n_1}\right) \left(\left(\frac{n_1}{n_{i+2}}\right) + L_1 \left(-\frac{1}{f_{i+1}}\right) + \left(-\frac{a_{i+1}}{f_{i+1}}\right)\right) \quad (3.89)$$

でできる。

第4節の表 4.3~4.5 に逐次計算式をまとめる。数値の逐次計算用の式は、桁落ちがなくなるわけではないが、次の計算にあまり影響しないようになっている。例えば焦点距離の逐次計算が桁落ちするのは  $(-1/f_{i+1}) \doteq 0$  のときであるが、この場合次の計算で  $(-1/f_i)$  の項は 0 に近いいため他の項に比べて無視できる値となる。

## 4 近軸公式のまとめ

ここまでの結果を表にまとめる。図 4.1 に界面数が  $i+1$  の場合の各変数の定義、表 4.1 に近軸追跡式と変数等の定義、表 4.2 にレンズの基本式 (界面数  $i$  の場合)、表 4.3~4.5 に逐次計算式を示す。表 4.6 には界面数 4 までの、表 4.7 には前後対称レンズの界面数 6 までの焦点距離・主点位置などの計算結果を示す。逐次計算式を表計算ソフトに入れておけば、界面が何十枚あっても焦点距離や主点位置、像位置、倍率をすぐ計算できる。(技術資料 2016-001「近軸計算シート」参照)

ところで、第7節で述べるように

$$P_i = -\frac{R_i}{n_i}$$

$$P_{SUMi} = P_1 + P_2 + \dots + P_i$$

$$\rho_i = -\frac{1}{P_{SUMi}}$$

とすると、 $P_{SUMi}$  はペッツバル和を表すため、これもあわせて示す。 $\rho_i$  は、ペッツバル像面の曲率半径である。

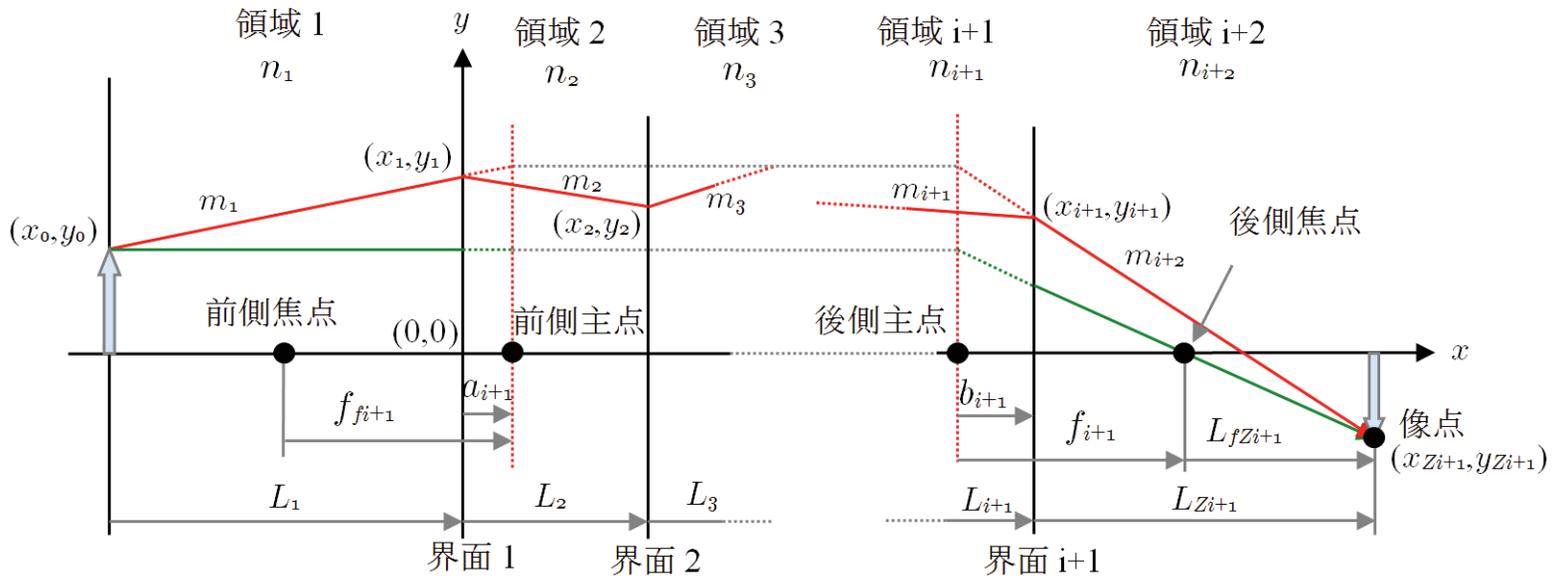


図 4.1 近軸計算における変数等の定義 [ 領域 i+1 における光線の式 :  $y - y_i = m_{i+1}(x - x_i)$  ]

表 4.1 定義

近軸追跡式

$$y_i = L_i m_i + y_{i-1}$$

$$m_{i+1} = S_i m_i + R_i y_i$$

変数の定義

$$S_i = n_i / n_{i+1}$$

$$R_i = -(n_{i+1} - n_i) / n_{i+1} / r_i$$

$$Q_i = L_i R_i$$

$$U_i = S_i + Q_i$$

$$P_i = -R_i / n_i$$

$f_i$ : 後側焦点距離 (焦点距離)

$b_i$ : 後側主点-最終界面間距離 (後側主点位置)

$a_i$ : 界面 1-前側主点間距離 (前側主点位置)

関係式

$$n_1 / n_{i+1} = S_1 S_2 \cdots S_i$$

$$R_i = (S_i - 1) / r_i$$

$$S_i Q_j + Q_i U_j = U_i Q_j + Q_i S_j$$

表 4.2 基本式

レンズ基本式

$$1/f_i = (n_1/n_{i+1})/(L_1 + a_i) + 1/(b_i + L_{zi})$$

横倍率 (倍率)

$$\beta_i = -(n_1/n_{i+1})(b_i + L_{zi})/(L_1 + a_i)$$

物体~界面 1 間距離 (物体位置)

$$L_1 = (n_1/n_{i+1})(1 - 1/\beta_i)f_i - a_i$$

最終界面 i~像面間距離 (像位置)

$$L_{zi} = (1 - \beta_i)f_i - b_i$$

後側焦点~像面間距離

$$L_{fzi} = -\beta_i f_i$$

前側焦点距離

$$f_{fi} = (n_1/n_{i+1})f_i$$

表 4.3 逐次計算式 (理論式)

$$\begin{aligned}
 f_{i+1} &= f_i / (U_{i+1} - (f_i - b_i)R_{i+1}) \\
 & \quad [f_1 = -1/R_1] \\
 b_{i+1} &= (b_i + L_{i+1})(f_{i+1}/f_i) \\
 & \quad [b_1 = 0] \\
 a_{i+1} &= a_i - (n_1/n_{i+1})(b_i + L_{i+1})R_{i+1}/(1/f_{i+1}) \\
 & \quad [a_1 = 0] \\
 L_{Zi+1} &= -(L_{i+1} - L_{Zi})/(S_{i+1} + (L_{i+1} - L_{Zi})R_{i+1}) \\
 & \quad [L_{Z1} = -L_1/U_1] \\
 \beta_{i+1} &= S_{i+1}/f_i / (1/f_{i+1}/\beta_i + R_{i+1}) \\
 & \quad [\beta_1 = S_1/U_1] \\
 P_{SUMi+1} &= P_{SUMi} + P_{i+1} \quad (\text{ペッツバール和}) \\
 & \quad [P_{SUM1} = P_1] \\
 \rho_i &= -1/P_{SUMi} \quad (\text{ペッツバール像面曲率半径})
 \end{aligned}$$

表 4.4 逐次計算式 (代数式)

$$\begin{aligned}
 -1/f_{i+1} &= (-1/f_i)U_{i+1} + (-b_i/f_i)R_{i+1} + R_{i+1} \\
 & \quad [-1/f_1 = R_1] \\
 -b_{i+1}/f_{i+1} &= (-b_i/f_i) + (-1/f_i)L_{i+1} \\
 & \quad [-b_1/f_1 = 0] \\
 -a_{i+1}/f_{i+1} &= ((-a_i/f_i)(-1/f_{i+1}) + (n_1/n_{i+1})(-b_{i+1}/f_{i+1})R_{i+1})/(-1/f_i) \\
 & \quad [-a_1/f_1 = 0] \\
 -L_{Zi+1} &= ((-L_{Zi}) + L_{i+1})/(U_{i+1} + (-L_{Zi})R_{i+1}) \\
 & \quad [-L_{Z1} = L_1/U_1] \\
 1/\beta_{i+1} &= (n_{i+2}/n_1)((n_1/n_{i+2}) + L_1(-1/f_{i+1}) + (-a_{i+1}/f_{i+1})) \\
 & \quad [1/\beta_1 = (n_2/n_1)U_1]
 \end{aligned}$$

表 4.5 逐次計算式 (数値)

 ( $\infty$  の場合  $1 \times 10^{100}$  とする)

$$\begin{aligned}
 -1/f_{i+1} &= (-1/f_i)U_{i+1} + (-b_i/f_i)R_{i+1} + R_{i+1} \\
 & \quad [-1/f_1 = R_1] \\
 -b_{i+1}/f_{i+1} &= (-b_i/f_i) + (-1/f_i)L_{i+1} \\
 & \quad [-b_1/f_1 = 0] \\
 L_{Zi+1} &= 1/(S_{i+1}/(L_{Zi} - L_{i+1}) - R_{i+1}) \\
 & \quad L_{i+1} = L_{Zi} \text{ のとき } L_{Zi+1} = 0 \\
 & \quad (L_{Zi} - L_{i+1})R_{i+1} = S_{i+1} \text{ のとき } L_{Zi+1} = 1 \times 10^{100} \\
 & \quad [L_{Z1} = -L_1/U_1 \quad (U_1 = 0 \text{ のとき } L_{Z1} = 1 \times 10^{100})] \\
 L_{ZZi+1} &= 1/(S_{i+1}/(L_{ZZi} - L_{i+1}) - R_{i+1}) \\
 & \quad L_{i+1} = L_{ZZi} \text{ のとき } L_{ZZi+1} = 0 \\
 & \quad (L_{ZZi} - L_{i+1})R_{i+1} = S_{i+1} \text{ のとき } L_{ZZi+1} = 1 \times 10^{100} \\
 & \quad [L_{ZZ1} = 0] \\
 f_i &= -1/(-1/f_i) \\
 & \quad (-1/f_i) = 0 \text{ のとき } f_i = 1 \times 10^{100} \\
 b_i &= (-b_i/f_i)/(-1/f_i) \\
 & \quad (-b_i/f_i) = 0 \text{ のとき } b_i = 0 \\
 & \quad (-1/f_i) = 0 \text{ のとき } b_i = 1 \times 10^{100}
 \end{aligned}$$

$$a_i = (n_1/n_{i+1})f_i/(1 + 1/((-b_i/f_i) + L_{ZZi}(-1/f_i)))$$

$(-b_i/f_i) = -L_{ZZi}(-1/f_i)$  のとき  $a_i = 0$   
 $(-b_i/f_i) + L_{ZZi}(-1/f_i) = -1$  のとき  $a_i = 1 \times 10^{100}$

$$\beta_i = -(n_1/n_{i+1})(b_i + L_{Zi})/(L_1 + a_i)$$

$L_1 + a_i = 0$  のとき  $\beta_i = 1 \times 10^{100}$

表 4.6 界面数 4 までの、焦点距離、主点位置、像位置、倍率

焦点距離: $f_i$

$$\begin{aligned} -1/f_1 &= R_1 \\ -1/f_2 &= R_1U_2 + R_2 \\ -1/f_3 &= R_1(U_2U_3 + L_2R_3) + R_2U_3 + R_3 \\ -1/f_4 &= R_1((U_2U_3 + L_2R_3)U_4 + (L_2 + U_2L_3)R_4) + R_2(U_3U_4 + L_3R_4) + R_3U_4 + R_4 \end{aligned}$$

後側主点位置: $b_i$

$$\begin{aligned} -b_1/f_1 &= 0 \\ -b_2/f_2 &= R_1L_2 \\ -b_3/f_3 &= R_1L_2 + (R_1U_2 + R_2)L_3 \\ -b_4/f_4 &= R_1L_2 + (R_1U_2 + R_2)L_3 + (R_1(U_2U_3 + L_2R_3) + R_2U_3 + R_3)L_4 \end{aligned}$$

前側主点位置: $a_i$

$$\begin{aligned} -a_1/f_1 &= 0 \\ -a_2/f_2 &= S_1R_2L_2 \\ -a_3/f_3 &= S_1((R_2U_3 + R_3)L_2 + S_2R_3L_3) \\ -a_4/f_4 &= S_1((R_2(U_3U_4 + L_3R_4) + (R_3U_4 + R_4))L_2 + S_2((R_3U_4 + R_4)L_3 + S_3R_4L_4)) \end{aligned}$$

像位置: $L_{Zi}$

$$\begin{aligned} -L_{Z1}/\beta_1 &= (n_2/n_1)L_1 \\ -L_{Z2}/\beta_2 &= (n_3/n_1)(L_1 + U_1L_2) \\ -L_{Z3}/\beta_3 &= (n_4/n_1)(L_1 + U_1L_2 + (U_1U_2 + L_1R_2)L_3) \\ -L_{Z4}/\beta_4 &= (n_5/n_1)(L_1 + U_1L_2 + (U_1U_2 + L_1R_2)L_3 + ((U_1U_2 + L_1R_2)U_3 + (L_1 + U_1L_2)R_3)L_4) \end{aligned}$$

倍率: $\beta_i$

$$\begin{aligned} 1/\beta_1 &= (n_2/n_1)U_1 \\ 1/\beta_2 &= (n_3/n_1)(U_1U_2 + L_1R_2) \\ 1/\beta_3 &= (n_4/n_1)(U_1(U_2U_3 + L_2R_3) + L_1(R_2U_3 + R_3)) \\ 1/\beta_4 &= (n_5/n_1)(U_1(U_2(U_3U_4 + L_3R_4) + L_2(R_3U_4 + R_4)) + L_1(R_2(U_3U_4 + L_3R_4) + R_3U_4 + R_4)) \end{aligned}$$

表 4.7 前後対称レンズ ( $s$  をつけて表す) の界面数 6 までの、焦点距離、主点位置、像位置、倍率

対称性

$$\begin{aligned} 2 \text{ 界面 } (2s): n_1 &= n_3, r_1 = -r_2 \\ 4 \text{ 界面 } (4s): n_1 &= n_5, n_2 = n_4, r_1 = -r_4, r_2 = -r_3, L_2 = L_4 \\ 6 \text{ 界面 } (6s): n_1 &= n_7, n_2 = n_6, n_3 = n_5, r_1 = -r_6, r_2 = -r_5, r_3 = -r_4, L_2 = L_6, L_3 = L_5 \end{aligned}$$

変数の関係

$$\begin{aligned} 2 \text{ 界面 } (2s): S_2 &= 1/S_1, R_2 = R_1/S_1, U_2 = (1 + R_1L_2)/S_1 \\ 4 \text{ 界面 } (4s): S_3 &= 1/S_2, S_4 = 1/S_1, R_3 = R_2/S_2, R_4 = R_1/S_1, U_3 = (1 + R_2L_3)/S_2, U_4 = (1 + R_1L_2)/S_1 \\ 6 \text{ 界面 } (6s): S_4 &= 1/S_3, S_5 = 1/S_2, S_6 = 1/S_1, R_4 = R_3/S_3, R_5 = R_2/S_2, R_6 = R_1/S_1, \\ U_4 &= (1 + R_3L_4)/S_3, U_5 = (1 + R_2L_3)/S_2, U_6 = (1 + R_1L_2)/S_1 \end{aligned}$$

焦点距離: $f_{is}$

$$\begin{aligned} -1/f_{2s} &= (n_2/n_1)R_1(2 + R_1L_2) \\ -1/f_{4s} &= (n_3/n_1)(R_1U_2 + R_2)(2(1 + R_1L_2) + (R_1U_2 + R_2)L_3) \end{aligned}$$

$$-1/f_{6s} = (n_4/n_1)((R_1U_2 + R_2)U_3 + (1 + R_1L_2)R_3)(2(1 + R_1L_2 + (R_1U_2 + R_2)L_3) + ((R_1U_2 + R_2)U_3 + (1 + R_1L_2)R_3)L_4)$$

主点位置: $b_{is}, a_{is}$

$$-b_{2s}/f_{2s} = -a_{2s}/f_{2s} = R_1L_2$$

$$-b_{4s}/f_{4s} = -a_{4s}/f_{4s} = (n_3/n_2)(R_1U_2 + R_2)(2L_2 + U_2L_3)$$

$$-b_{6s}/f_{6s} = -a_{6s}/f_{6s} = (n_4/n_2)((R_1U_2 + R_2)U_3 + (1 + R_1L_2)R_3)(2(L_2 + U_2L_3) + (L_2R_3 + U_2U_3)L_4)$$

像位置: $L_{Zis}$

$$-L_{Z2s}/\beta_{2s} = (L_1 + U_1L_2)$$

$$-L_{Z4s}/\beta_{4s} = (n_3/n_2)(U_2L_1 + (2U_1U_2 + L_1R_2)L_2 + (U_1U_2 + L_1R_2)U_2L_3)$$

$$-L_{Z6s}/\beta_{6s} = (n_4/n_2)(U_2U_3L_1 + ((2U_1U_2 + L_1R_2)U_3 + 2(L_1 + U_1L_2)R_3)L_2 + (2(U_1U_2 + L_1R_2)U_2U_3 + (L_1U_2 + (2U_1U_2 + L_1R_2)L_2)R_3)L_3 + ((L_1 + U_1L_2)R_3 + (U_1U_2 + L_1R_2)U_3)(U_2U_3 + L_2R_3)L_4)$$

倍率: $\beta_{is}$

$$1/\beta_{2s} = (n_2/n_1)(U_1 + (L_1 + U_1L_2)R_1)$$

$$1/\beta_{4s} = (n_3/n_1)((1 + R_1L_2)(U_1U_2 + L_1R_2) + (L_1 + U_1L_2 + (U_1U_2 + L_1R_2)L_3)(R_1U_2 + R_2))$$

$$1/\beta_{6s} = (n_4/n_1)((1 + R_1L_2 + (R_1U_2 + R_2)L_3)((U_1U_2 + L_1R_2)U_3 + (L_1 + U_1L_2)R_3) + (L_1 + U_1L_2 + (U_1U_2 + L_1R_2)L_3) + ((U_1U_2 + L_1R_2)U_3 + (L_1 + U_1L_2)R_3)L_4)((R_1U_2 + R_2)U_3 + (1 + R_1L_2)R_3))$$

## 5 倍率などからの界面曲率半径の逆算

前節のように界面の曲率半径などから倍率などを計算する代数式が求まるが、これを用いて倍率  $\beta_i$  や像位置  $L_{Zi}$  などが与えられた場合に、界面の曲率半径などを逆算する式を求める。

なお、逆算に関しては現実的な解が無いこともある。また、平行光になる領域の  $L$  は逆算できない（一つに決まらない）。

### 5.1 倍率と物体位置からの逆算

倍率  $\beta_i$  の代数式を、目的の界面の  $R$  や  $L$  などについて解くと、逆算式が得られる。当然ながら、他の界面の  $r$  と  $L$  は先に決めておく必要がある。前後対称レンズ（一般の両凸・両凹レンズやトリプレットなど）については、2つの条件を同時に変えることになるため、2次式になる。曲率半径  $r$  は、 $R_i$  の定義式 (3.2) から

$$R_i = -\left(\frac{n_{i+1} - n_i}{n_{i+1}}\right)\frac{1}{r_i} = \frac{S_i - 1}{r_i} \quad (5.1)$$

なので、

$$r_i = \frac{S_i - 1}{R_i} \quad (5.2)$$

で求まる。表 5.1 に、4 界面までの逆算式を示す。前後対称レンズで 2 次式になる場合は、解を載せると複雑になるため、そのまま 2 次式を載せているのでこれを解けばよい。

表 5.1 倍率と物体位置からの逆算

$\beta_i$ と $L_1$ から逆算	: $(1/\beta_i)$ の代数式を解く。
1 界面 (1)	
$R_1 = ((n_1/n_2)/\beta_1 - S_1)/L_1$	
2 界面 (2)	

$$\begin{aligned} R_1 &= ((n_1/n_3)/\beta_2 - L_1 R_2 - S_1 U_2)/L_1/U_2 \\ R_2 &= ((n_1/n_3)/\beta_2 - U_1 S_2)/(L_1 + U_1 L_2) \\ L_2 &= ((n_1/n_3)/\beta_2 - U_1 S_2 - L_1 R_2)/U_1/R_2 \end{aligned}$$

3 界面 (3)

$$\begin{aligned} R_1 &= ((n_1/n_4)/\beta_3 - L_1(R_2 U_3 + R_3) - S_1(U_2 U_3 + L_2 R_3))/L_1/(U_2 U_3 + L_2 R_3) \\ R_2 &= ((n_1/n_4)/\beta_3 - (L_1 + U_1 L_2)R_3 - U_1 S_2 U_3)/(L_1 + U_1 L_2)/U_3 \\ R_3 &= ((n_1/n_4)/\beta_3 - (U_1 U_2 + L_1 R_2)S_3)/((L_1 + U_1 L_2) + (U_1 U_2 + L_1 R_2)L_3) \\ L_2 &= ((n_1/n_4)/\beta_3 - U_1 S_2 U_3 - L_1(R_2 U_3 + R_3))/U_1/(R_2 U_3 + R_3) \\ L_3 &= ((n_1/n_4)/\beta_3 - (U_1 U_2 + L_1 R_2)S_3 - (L_1 + U_1 L_2)R_3)/(U_1 U_2 + L_1 R_2)/R_3 \end{aligned}$$

4 界面 (4)

$$\begin{aligned} R_1 &= ((n_1/n_5)/\beta_4 - L_1((1 + R_2 L_3)R_4 + (R_2 U_3 + R_3)U_4) \\ &\quad - S_1((L_2 + U_2 L_3)R_4 + (U_2 U_3 + L_2 R_3)U_4))/L_1/((L_2 + U_2 L_3)R_4 + (U_2 U_3 + L_2 R_3)U_4) \\ R_2 &= ((n_1/n_5)/\beta_4 - (L_1 + U_1 L_2)(R_3 U_4 + R_4) - U_1 S_2(U_3 U_4 + L_3 R_4))/(L_1 + U_1 L_2)/(U_3 U_4 + L_3 R_4) \\ R_3 &= ((n_1/n_5)/\beta_4 - (L_1(1 + R_2 L_3) + U_1(L_2 + U_2 L_3))R_4 \\ &\quad - (U_1 U_2 + L_1 R_2)S_3 U_4)/(L_1(1 + R_2 L_3) + U_1(L_2 + U_2 L_3))/U_4 \\ R_4 &= ((n_1/n_5)/\beta_4 - (L_1 + U_1 L_2)R_3 S_4 - (U_1 U_2 + L_1 R_2)U_3 S_4)/((L_1 + U_1 L_2)(1 + R_3 L_4) \\ &\quad + (U_1 U_2 + L_1 R_2)(L_3 + U_3 L_4)) \\ L_2 &= ((n_1/n_5)/\beta_4 - U_1 S_2(U_3 U_4 + L_3 R_4) - L_1((1 + R_2 L_3)R_4 + (R_2 U_3 + R_3)U_4))/U_1/((1 + R_2 L_3)R_4 \\ &\quad + (R_2 U_3 + R_3)U_4) \\ L_3 &= ((n_1/n_5)/\beta_4 - (U_1 U_2 + L_1 R_2)S_3 U_4 - (L_1 + U_1 L_2)(R_3 U_4 + R_4))/(R_3 U_4 + R_4)/(U_1 U_2 + L_1 R_2) \\ L_4 &= ((n_1/n_5)/\beta_4 - ((L_1 + U_1 L_2)R_3 + (U_1 U_2 + L_1 R_2)U_3)S_4 \\ &\quad - (L_1(1 + R_2 L_3) + U_1(L_2 + U_2 L_3))R_4)/((L_1 + U_1 L_2)R_3 + (U_1 U_2 + L_1 R_2)U_3)/R_4 \end{aligned}$$

対称 2 界面 (2s)

$$\begin{aligned} R_1 &\leftarrow L_1 L_2 R_1^2 + (2L_1 + S_1 L_2)R_1 + (S_1 - (n_1/n_2)/\beta_{2s}) = 0 \\ L_2 &= ((n_1/n_2)/\beta_{2s} - S_1 - 2R_1 L_1)/R_1/U_1 \end{aligned}$$

対称 4 界面 (4s)

$$\begin{aligned} R_1 &\leftarrow L_1 U_2 (2L_2 + U_2 L_3)R_1^2 + ((2 + R_2 L_3)L_1 U_2 + (L_1 R_2 + S_1 U_2)(2L_2 + U_2 L_3))R_1 \\ &\quad + ((L_1 R_2 + S_1 U_2) + S_1 R_2(L_2 + U_2 L_3) + L_1 R_2(1 + R_2 L_3) - (n_1/n_3)/\beta_{4s}) = 0 \\ R_2 &\leftarrow (1 + R_1 L_2)(L_1 + U_1 L_2)L_3 R_2^2 \\ &\quad + ((L_1 + U_1(L_2 + S_2 L_3))(1 + R_1 L_2) + (L_1 + U_1 L_2)(1 + R_1(L_2 + S_2 L_3)))R_2 \\ &\quad + (S_2((1 + R_1 L_2)U_1 + (L_1 + U_1(L_2 + S_2 L_3))R_1) - (n_1/n_3)/\beta_{4s}) = 0 \\ L_2 &\leftarrow R_1 U_1 (2 + R_2 L_3)R_2 L_2^2 + ((2 + R_2 L_3)(R_1 S_2 + R_2)U_1 + (2L_1 + (U_1 S_2 + L_1 R_2)L_3)R_1 R_2)L_2 \\ &\quad + ((U_1 S_2 + L_1 R_2) + (L_1 + (U_1 S_2 + L_1 R_2)L_3)(R_1 S_2 + R_2) - (n_1/n_3)/\beta_{4s}) = 0 \\ L_3 &= ((n_1/n_3)/\beta_{4s} - (U_1 U_2 + L_1 R_2)(1 + R_1 L_2) - (L_1 + U_1 L_2)(R_1 U_2 + R_2))/(R_1 U_2 + R_2)/(U_1 U_2 + L_1 R_2) \end{aligned}$$

## 5.2 倍率と像位置からの逆算

倍率と像位置からの逆算は、次のようにして行う。(3.67) 式より

$$\left(-\frac{b_i}{f_i}\right) + L_{Zi}\left(-\frac{1}{f_i}\right) + 1 - \beta_i = 0 \quad (5.3)$$

これに、 $(-b_i/f_i)$  と  $(-1/f_i)$  の代数式を代入し、目的の界面の  $R$  や  $L$  について解く。これにより、 $L_1$  以外のすべての  $r$  と  $L$  が決まることになるので、逐次計算などで  $f_i, b_i, a_i$  が求まり、(3.68) 式より  $L_1$  が求まる。4 界面までの  $b$  と  $f$  は計算してあるので (表 4.4)、代入すればよい。界面数がそれより多い場合、逐次計算式で計算すれば、式は非常に長くなるが、原理的には計算可能である。表 5.2 に、4 界面までの逆算式を示す。

表 5.2 倍率と像位置からの逆算

$\beta_i$  と  $L_{Z_i}$  から逆算 :  $(-b_i/f_i) + L_{Z_i}(-1/f_i) + 1 - \beta_i = 0$  に  $f_i$ 、 $b_i$  の代数式を代入して解く。

1 界面 (1)

$$R_1 = (\beta_1 - 1)/L_{Z1}$$

2 界面 (2)

$$R_1 = (\beta_2 - (1 + L_{Z2}R_2))/(L_2 + L_{Z2}U_2)$$

$$R_2 = (\beta_2 - (1 + R_1L_2) - L_{Z2}R_1S_2)/(1 + R_1L_2)/L_{Z2}$$

$$L_2 = (\beta_2 - L_{Z2}R_1S_2 - (1 + L_{Z2}R_2))/R_1/(1 + L_{Z2}R_2)$$

3 界面 (3)

$$R_1 = (\beta_3 - (1 + L_{Z3}R_3) - R_2(L_3 + L_{Z3}U_3))/(L_2(1 + L_{Z3}R_3) + U_2(L_3 + L_{Z3}U_3))$$

$$R_2 = (\beta_3 - (1 + R_1L_2)(1 + L_{Z3}R_3) - R_1S_2(L_3 + L_{Z3}U_3))/(1 + R_1L_2)/(L_3 + L_{Z3}U_3)$$

$$R_3 = (\beta_3 - ((1 + R_1L_2) + (R_1U_2 + R_2)L_3)L_{Z3}(R_1U_2 + R_2)S_3)/((1 + R_1L_2) + (R_1U_2 + R_2)L_3)/L_{Z3}$$

$$L_2 = (\beta_3 - R_1S_2(L_3 + L_{Z3}U_3) - ((1 + R_2L_3) + L_{Z3}(R_2U_3 + R_3)))/R_1/((1 + R_2L_3) + L_{Z3}(R_2U_3 + R_3))$$

$$L_3 = (\beta_3 - L_{Z3}(R_1U_2 + R_2)S_3 - (1 + R_1L_2)(1 + L_{Z3}R_3))/(R_1U_2 + R_2)/(1 + L_{Z3}R_3)$$

4 界面 (4)

$$R_1 = (\beta_4 - (1 + R_2L_3)(1 + L_{Z4}R_4) - (R_2U_3 + R_3)(L_4 + L_{Z4}U_4))$$

$$/((L_2 + U_2L_3)(1 + L_{Z4}R_4) + (U_2U_3 + L_2R_3)(L_4 + L_{Z4}U_4))$$

$$R_2 = (\beta_4 - (1 + R_1L_2)(R_3(L_4 + L_{Z4}U_4) + (1 + L_{Z4}R_4)) - R_1S_2(L_3(1 + L_{Z4}R_4) + U_3(L_4 + L_{Z4}U_4)))$$

$$/(1 + R_1L_2)/(L_3(1 + L_{Z4}R_4) + U_3(L_4 + L_{Z4}U_4))$$

$$R_3 = (\beta_4 - ((1 + R_1L_2) + (R_1U_2 + R_2)L_3)(1 + L_{Z4}R_4) - (R_1U_2 + R_2)S_3(L_4 + L_{Z4}U_4))$$

$$/((1 + R_1L_2) + (R_1U_2 + R_2)L_3)/(L_4 + L_{Z4}U_4)$$

$$R_4 = (\beta_4 - (1 + R_1L_2)(1 + R_3L_4) - (R_1U_2 + R_2)(L_3 + U_3L_4) - L_{Z4}((1 + R_1L_2)R_3 + (R_1U_2 + R_2)U_3)S_4)$$

$$/((1 + R_1L_2)(1 + R_3L_4) + (R_1U_2 + R_2)(L_3 + U_3L_4))/L_{Z4}$$

$$L_2 = (\beta_4 - R_1S_2(L_3(1 + L_{Z4}R_4) + U_3(L_4 + L_{Z4}U_4))$$

$$-((1 + R_2L_3)(1 + L_{Z4}R_4) + (R_2U_3 + R_3)(L_4 + L_{Z4}U_4)))$$

$$/R_1/((1 + R_2L_3)(1 + L_{Z4}R_4) + (R_2U_3 + R_3)(L_4 + L_{Z4}U_4))$$

$$L_3 = (\beta_4 - (R_1U_2 + R_2)S_3(L_4 + L_{Z4}U_4) - (1 + R_1L_2)((1 + R_3L_4) + L_{Z4}(R_3U_4 + R_4)))$$

$$/(R_1U_2 + R_2)/((1 + R_3L_4) + L_{Z4}(R_3U_4 + R_4))$$

$$L_4 = (\beta_4 - L_{Z4}((1 + R_1L_2)R_3 + (R_1U_2 + R_2)U_3)S_4 - ((1 + R_1L_2) + (R_1U_2 + R_2)L_3)(1 + L_{Z4}R_4))$$

$$/((1 + R_1L_2)R_3 + (R_1U_2 + R_2)U_3)/(1 + L_{Z4}R_4)$$

対称 2 界面 (2s)

$$R_1 \leftarrow L_{Z2s}L_2R_1^2 + (S_1L_2 + 2L_{Z2s})R_1 + (n_1/n_2)(1 - \beta_{2s}) = 0$$

$$L_2 = -(2L_{Z2s} + (n_1/n_2)(1 - \beta_{2s})/R_1)/(L_{Z2s}R_1 + S_1)$$

対称 4 界面 (4s)

$$R_1 \leftarrow L_{Z4s}(2L_2 + U_2L_3)U_2R_1^2 + ((S_1U_2 + L_{Z4s}R_2)(2L_2 + U_2L_3) + L_{Z4s}(2 + R_2L_3)U_2)R_1$$

$$+ (S_1(2L_2 + U_2L_3) + L_{Z4s}(2 + R_2L_3))R_2 + (n_1/n_3)(1 - \beta_{4s}) = 0$$

$$R_2 \leftarrow (1 + R_1L_2)((S_1 + L_{Z4s}R_1)L_2 + L_{Z4s}L_3R_2^2$$

$$+ (((2L_2 + S_2L_3) + 2R_1L_2(L_2 + S_2L_3))(S_1 + L_{Z4s}R_1) + L_{Z4s}(2 + R_1(2L_2 + S_2L_3)))R_2$$

$$+ R_1S_2((2L_2 + S_2L_3)(S_1 + L_{Z4s}R_1) + 2L_{Z4s}) + (n_1/n_3)(1 - \beta_{4s}) = 0$$

$$L_2 \leftarrow R_1R_2(S_1 + L_{Z4s}R_1)(2 + R_2L_3)L_2^2$$

$$+ (2R_1S_2(S_1 + L_{Z4s}R_1)(1 + R_2L_3) + (S_1 + 2L_{Z4s}R_1)R_2(2 + R_2L_3))L_2$$

$$+ (R_1S_2 + R_2)((S_1 + L_{Z4s}R_1)S_2L_3 + L_{Z4s}(2 + R_2L_3)) + (n_1/n_3)(1 - \beta_{4s}) = 0$$

$$L_3 = -(2(L_{Z4s}(1 + R_1L_2) + S_1L_2) + (n_1/n_3)(1 - \beta_{4s})/(R_1U_2 + R_2))/(L_{Z4s}(R_1U_2 + R_2) + S_1U_2)$$

### 5.3 倍率、物体位置、像位置 からの 2 変数の逆算

$\beta_i$ 、 $L_1$ 、 $L_{Zi}$  のすべてが決まっているときは 2 つの変数が決まる。これは次のようにして求まる。5.1 で求めた逆算式 (表 5.1) と、5.2 で求めた逆算式 (表 5.2) が同時に成り立つ必要があるため、求めたい 2 つの変数のうちどちらかを等しいとして消去してもう一方の変数を求め、次にそれを代入して先に消去した変数を求める。

(例) 厚さ  $d (= L_2)$  の単レンズ (2 界面) について、 $\beta_2$ 、 $L_1$ 、 $L_{Z2}$  から  $r_1$  と  $r_2$  を逆算する。各領域の屈折率は決まっているものとする。 $R_2$  の倍率  $\beta_2$  と物体位置  $L_1$  からの逆算式は、表 5.1 より

$$R_2 = \frac{\left(\frac{n_1}{n_3}\right)\frac{1}{\beta_2} - U_1 S_2}{L_1 + U_1 L_2}$$

$R_2$  の倍率  $\beta_2$  と像位置  $L_{Z2}$  からの逆算式は表 5.2 より

$$R_2 = \frac{\beta_2 - (1 + R_1 L_2) - L_{Z2} R_1 S_2}{(1 + R_1 L_2) L_{Z2}}$$

これが等しいとして

$$\frac{\left(\frac{n_1}{n_3}\right)\frac{1}{\beta_2} - U_1 S_2}{L_1 + U_1 L_2} = \frac{\beta_2 - (1 + R_1 L_2) - L_{Z2} R_1 S_2}{(1 + R_1 L_2) L_{Z2}}$$

$U_1$  を  $(L_1 R_1 + S_1)$  で置き換えて、 $R_1$  についてまとめると次の 2 次式になる。

$$L_1 L_2^2 R_1^2 + \left( (L_1 + S_1 L_2 + \left(\frac{n_1}{n_3}\right)\frac{L_{Z2}}{\beta_2}) + (1 - \beta_2) L_1 \right) L_2 R_1 + (1 - \beta_2) \left( L_1 + S_1 L_2 + \left(\frac{n_1}{n_3}\right)\frac{L_{Z2}}{\beta_2} \right) = 0$$

これを解くと  $R_1$  が求まる。求まった  $R_1$  を  $R_2$  の逆算式に代入すれば  $R_2$  が求まる。これらを (5.2) 式で曲率半径に直せば  $r_1$ 、 $r_2$  が求まる。(技術資料 2016-001 「近軸計算シート」の [逆算例] を参照)

## 6 近軸公式の使用例

近軸公式を用いた代数計算の例をいくつか示す。

### 6.1 コリメートレンズ

点光源からの光を平行光にするレンズをコリメートレンズという。空気中 (屈折率 1) に、光源から  $L_1$  の距離に屈折率  $n$ 、厚さ  $d$  の平凸レンズ ( $r_1 = \infty, r_2$ ) がある場合を考える。(図 6.1 参照)

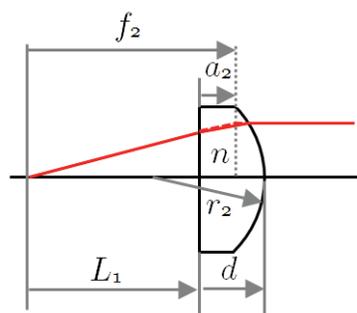


図 6.1 平凸コリメートレンズ

光源からの光が平行光になるには、界面数 2 の場合のレンズの基本式より  $L_{Z2} = \infty$  として

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{L_1 + a_2}$$

$R_1 = 0$  となるから、

$$\frac{1}{f_2} = -(R_1 U_2 + R_2) = -R_2 = -\frac{n-1}{r_2}$$

$$a_2 = -f_2 S_1 R_2 L_2 = -\left(-\frac{1}{R_2}\right) S_1 R_2 L_2 = S_1 L_2 = \frac{d}{n}$$

を代入して、 $r_2$  について解くと

$$r_2 = -(n-1)\left(L_1 + \frac{d}{n}\right)$$

となる。

## 6.2 ルーペ（拡大鏡、虫めがね）

空気中の物体から  $L_1$  の距離に屈折率  $n$  厚さ  $d$  の単レンズが有り、レンズ後端から  $L_e$  の距離（アイレリーフ）にアイポイントが有り、アイポイントの前方の明視距離  $L_v$ （個人差はあるが通常 250mm とする）のところに、倍率  $\beta_2$  の虚像が出来ているとする。また、レンズ後側焦点位置からアイポイントまでの距離を  $L_{fe}$ （アイポイントが焦点よりレンズ側にあれば負の値）とする。（図 6.2 参照）

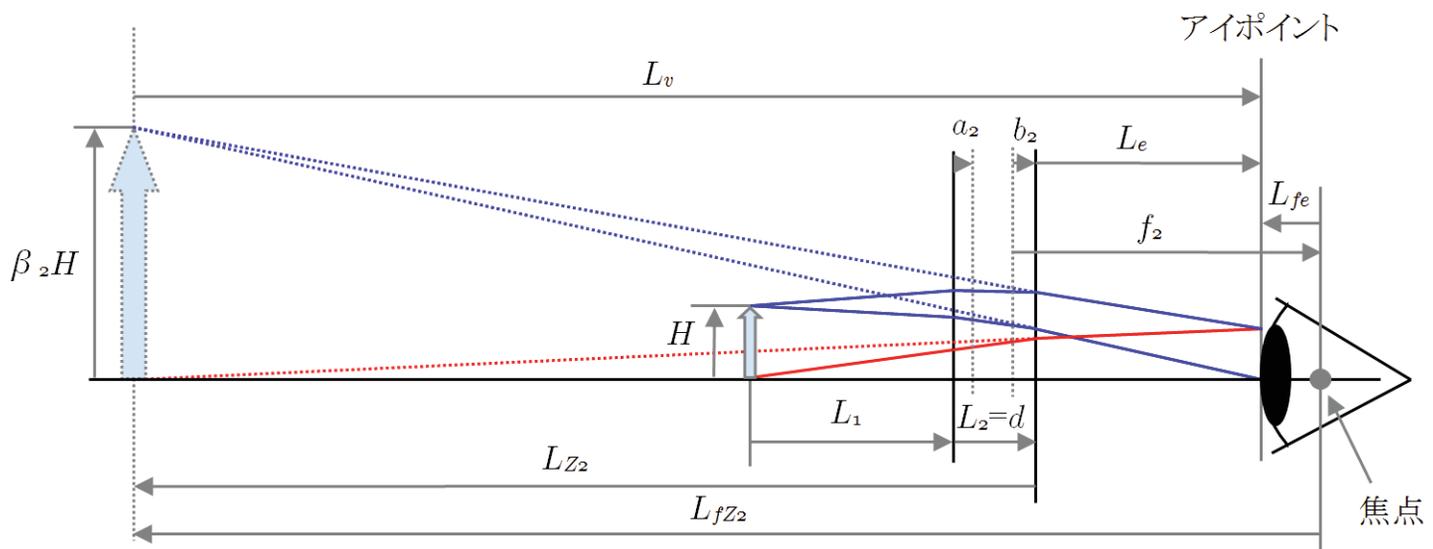


図 6.2 ルーペの近軸光線追跡

(3.69) 式より

$$L_{fz2} = -\beta_2 f_2$$

一方、図 6.2 より、

$$L_{fz2} = L_{fe} - L_v$$

であるから、

$$\beta_2 = \frac{L_v - L_{fe}}{f_2} \tag{6.1}$$

となる。(6.1) 式は一般に公開されている次の式 [1]

$$M = \left(\frac{L}{f}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{xz}{f^2}\right)}$$

( $M$  : 倍率,  $L$  : 明視距離,  $f$  : 焦点距離,  $x$  : 前側焦点～物体間距離,  $z$  : 後側焦点～目間距離)

とは異なって見えるが、変数をこの資料に合わせて次のように置き換え、 $M \rightarrow \beta_2$ ,  $L \rightarrow L_v$ ,  $f \rightarrow f_2$ ,  $x \rightarrow -(L_1 + a_2 - f_2)$ ,  $z \rightarrow L_{fe}$

$$\beta_2 = \left(\frac{L_v}{f_2}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{(L_1 + a_2 - f_2)L_{fe}}{f_2^2}\right)}$$

(3.68) 式より、 $n_1 = n_3$  の場合について

$$\frac{L_1 + a_2}{f_2} = 1 - \frac{1}{\beta_2}$$

を用いると、

$$\beta_2 = \left(\frac{L_v}{f_2}\right) \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{L_1 + a_2}{f_2} - 1\right) \frac{L_{fe}}{f_2}\right)} = \left(\frac{L_v}{f_2}\right) \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{\beta_2}\right) \frac{L_{fe}}{f_2}\right)}$$

$$\beta_2 \left(1 + \left(\frac{1}{\beta_2}\right) \frac{L_{fe}}{f_2}\right) = \frac{L_v}{f_2}$$

$$\beta_2 + \frac{L_{fe}}{f_2} = \frac{L_v}{f_2}$$

$$\beta_2 = \frac{L_v - L_{fe}}{f_2}$$

となり (6.1) 式と一致する。

市販されているルーペの倍率の表示は、メーカーによって異なるが、

$$\text{「倍率} = 250\text{mm} \div \text{ルーペの焦点距離} + 1\text{」}$$

の場合が多い。これは、 $L_{fe} = -f_2$  の場合を仮定したとき（目をレンズにくっつけた場合とされる）である。通常の両凸レンズでは、 $b_2$  が正であるためこのような状態はあり得ず、またレンズと目は離しているため、実際に見える倍率はこの表示の倍率より小さくなる。

$L_{Z2} = L_e - L_v$  であるから、 $n_1 = n_3$  のとき基本式 (3.63)(3.67)(3.68) 式より

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{L_1 + a_2} + \frac{1}{b_2 + L_e - L_v}$$

$$L_1 = \left(1 - \frac{1}{\beta_2}\right) f_2 - a_2$$

$$L_e - L_v = (1 - \beta_2) f_2 - b_2$$

となり、レンズを決めると  $f_2, b_2, a_2$  が一定となるので、明視距離  $L_v$  のところに虚像ができるようにするためには、倍率  $\beta_2$ 、物体の位置  $L_1$ 、アイポイント  $L_e$  のどれかを決めれば他の2つも決まることがわかる。

レンズが前後対称の両凸レンズ ( $r_1 = -r_2$ ) であるとして、曲率半径を逆算すると、図 6.2 を参照して

$$L_{Z2s} = L_e - L_v$$

であるから、表 5.2 の  $\beta_i$  と  $L_{Zi}$  からの逆算用 2 次式に代入し

$$(L_e - L_v)L_2R_1^2 + (S_1L_2 + 2(L_e - L_v))R_1 + S_1(1 - \beta_{2s}) = 0$$

これを  $R_1$  について解き ( $n_2$ (レンズ屈折率),  $L_2 = d$ (レンズ厚さ) はあらかじめ決めておく)、(5.2) 式を用いれば、目標の倍率  $\beta_2$  とアイポイント位置  $L_e$  からレンズの曲率半径が求まる ( $R_1$  の 2 次方程式の解の公式中の複合は、通常のルーペの条件では負となる)。この  $R_1$  を用いて  $f_{2s}, a_{2s}$  を表 4.4 の公式で計算すれば

$$f_{2s} = -\frac{1}{nR_1(2 + R_1L_2)}$$

$$a_{2s} = -f_{2s}R_1L_2$$

これを (3.68) 式より

$$L_1 = \left(1 - \frac{1}{\beta_{2s}}\right)f_{2s} - a_{2s}$$

に入れば、物体の位置が決まる。

### 6.3 反射鏡

反射鏡の場合を検討する。図 6.3 は空气中に凹面反射鏡があった場合の近軸光線追跡図である。領域 1 と領域 2 は同じ領域であるが、光線の進む向きが逆になるので屈折率の符号も逆になる ( $n_1 = 1, n_2 = -1$ )。

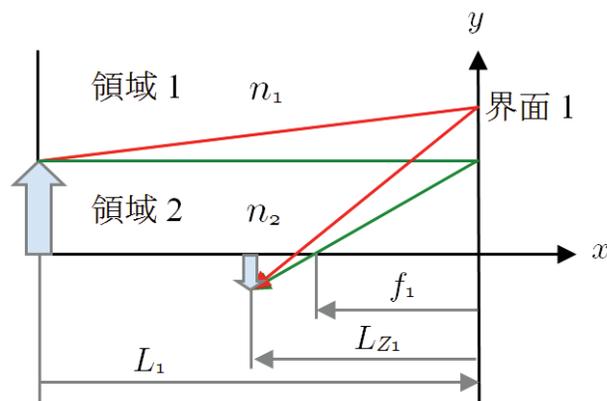


図 6.3 凹面反射鏡の近軸光線追跡 (この資料の定義では焦点距離が負となる)

このとき、表 4.1、4.3 より

$$R_1 = -\left(\frac{n_2 - n_1}{n_2}\right)\frac{1}{r_1} = -\frac{(-1 - 1)}{(-1)}\frac{1}{r_1} = -\frac{2}{r_1}$$

$$\frac{1}{f_1} = -R_1 = \frac{2}{r_1}$$

となる。凹面鏡の場合  $r_1$  は負なので、焦点距離  $f_1$  も負となる。

通常の光学のテキストでは凹面鏡の焦点距離を正、凸面鏡の焦点距離を負としているが、この資料では後側主点から後側焦点までの距離を焦点距離と定義しているため、凹面鏡の焦点距離が負となる。この例では界面数 1 のため、 $a_1 = b_1 = 0$  である。

(3.63) 式より反射鏡の基本式は

$$\frac{1}{f_1} = -\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_{Z1}}$$

となる (図 6.3 中の  $L_1$  と  $f_1$ 、 $L_{Z1}$  の距離を示す矢印の方向が逆になっていることに注意)。倍率の逆数は

$$\frac{1}{\beta_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)U1 = -(S_1 + L_1R_1) = 1 + 2\frac{L_1}{r_1}$$

となる。通常の場合 ( $L_1$  が正のとき)、凹面鏡の  $r_1$  は負であるため  $L_1$  が  $|r_1/2|$  より小さいとき  $\beta_1$  は正で正立虚像、 $L_1$  が  $|r_1/2|$  より大きいとき倒立実像となる。凸面鏡では  $r_1$  が正であるため正立虚像となる。

### 6.4 裏面反射鏡

図 6.4 は、市販の鏡のようにガラスの裏面で反射する、裏面反射凹面鏡の近軸光線追跡図である。

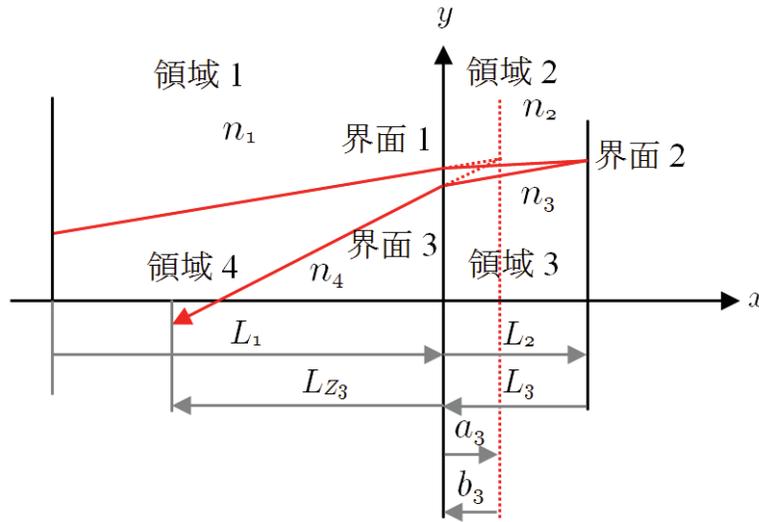


図 6.4 裏面反射凹面鏡の近軸光線追跡 (界面 1 と 3 が同じところにある)

屈折率  $n$ 、厚さ  $d$  の裏面ミラーが空気中にあるものとする、左に光が進むときは距離と屈折率は負になるため、各領域の関係は表 6.1 のとおりとなる。これを代入して計算すると、表 6.2 のようになる。

表 6.1 裏面反射鏡の屈折率、曲率半径、距離

領域 $i$	1	2	3	4
$n_i$	$n_1 = 1$	$n_2 = n$	$n_3 = -n$	$n_4 = -1$
$r_i$	$r_1$	$r_2$	$r_3 = r_1$	-
$L_i$	$L_1$	$L_2 = d$	$L_3 = -d$	-

表 6.2 裏面反射鏡の変数

界面 $i$	1	2	3
$S_i$	$S_1 = 1/n$	$S_2 = -1$	$S_3 = n$
$R_i$	$R_1 = -(n-1)/n/r_1$	$R_2 = -2/r_2$	$R_3 = (n-1)/r_1 = -nR_1$
$Q_i$	$Q_1 = L_1R_1$	$Q_2 = dR_2$	$Q_3 = ndR_1$
$U_i$	$U_1 = 1/n + L_1R_1$	$U_2 = -1 + dR_2$	$U_3 = n + ndR_1$

これを用いると

$$-\frac{1}{f_3} = R_1(U_2U_3 + L_2R_3) + R_2U_3 + R_3 = n(-2R_1 + R_2(1 + dR_1))(1 + dR_1)$$

ここで

$$t = 1 + dR_1 \tag{6.2}$$

とすると、

$$-\frac{1}{f_3} = tn(-2R_1 + tR_2) \tag{6.3}$$

同様にして

$$a_3 = -f_3S_1((R_2U_3 + R_3)L_2 + S_2R_3L_3) = \frac{d}{tn}$$

$$b_3 = -f_3(R_1L_2 + (R_1U_2 + R_2)L_3) = -\frac{d}{tn} = -a_3$$

(6.2) 式を変形すると、

$$t = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{d}{r_1}$$

となる。通常  $d < |r_1|$  であるため  $|d/r_1| < 1$  となり、 $t$  は 1 に近い値となる。また、 $n$  を固定し  $d/r_1 = \text{一定}$  として設計すると  $t$  も一定となり、計算が容易になる。

$t = 1$ 、 $n = 1.5$  として近似すると (6.3) 式は

$$\frac{1}{f_3} \doteq -\frac{1}{r_1} + \frac{3}{r_2}$$

となり、屈折率界面を 2 回通っても屈折率界面の  $1/r_1$  より反射界面の  $1/r_2$  の方が効果が約 3 倍大きいことがわかる。

$n_4 = -1$  なので、裏面反射鏡の倍率の逆数は (3.68) 式より、

$$1/\beta_3 = 1 + \frac{L_1 + a_3}{f_3}$$

像の出来る位置は (3.67) 式より

$$L_{Z3} = (1 - \beta_3)f_3 - b_3$$

となる。

## 7 単レンズ形状と色収差・ペッツバール和

近軸計算式を用い、空气中（屈折率は 1）に焦点距離  $f_2$  が正で、厚さ  $d$ 、屈折率  $n$  の単レンズがある場合のレンズ形状と色収差およびペッツバール和の関係を調べる。

### 7.1 形状ファクター

単レンズの形状を表すコディントンの形状ファクター  $\sigma_c$  は次のように定義される。

$$\sigma_c = \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} \quad (7.1)$$

$\sigma_c = -1$  のとき  $1/r_1 = 0$  で平凸レンズ、 $\sigma_c = 0$  のとき  $1/r_1 = -1/r_2$  で両凸レンズ、 $\sigma_c = 1$  のとき  $1/r_2 = 0$  で凸平レンズとなる。 $\sigma_c < -1$  と  $\sigma_c > 1$  はメニスカスレンズである。(7.1) 式を変形すると、

$$\sigma_c = \frac{nR_1 - R_2}{nR_1 + R_2} \quad (7.2)$$

となる。

$f_2 = \text{一定}$  として、各特性を調べる。表 4.4 より、 $-1/f_2 = R_1U_2 + R_2$  であるから、 $n_2 = n$ 、 $n_3 = 1$  として、

$$-\frac{1}{f_2} = R_1(dR_2 + S_2) + R_2 = dR_1R_2 + nR_1 + R_2$$

$$R_2 = -\left(\frac{1}{f_2} + nR_1\right)/(1 + dR_1)$$

これを、(7.2) 式に代入すると、

$$\sigma_c = \frac{ndR_1^2 + 2nR_1 + \frac{1}{f_2}}{ndR_1^2 - \frac{1}{f_2}}$$

となる。一方、表 4.4 より  $b_2 = -f_2R_1L_2$ 、 $a_2 = -f_2S_1R_2L_2$  であるから、

$$b_2 = -f_2 d R_1$$

$$a_2 = -\frac{f_2 d R_2}{n} = d \frac{\frac{1}{n} + R_1 f_2}{1 + d R_1}$$

となる。これらの式により、 $f_2 = \text{一定}$  として  $R_1$  を変化させたときのそれぞれの値が求まるので、 $R_1$  を媒介変数として使用できる。横軸を  $\sigma_c$  にして  $b_2, a_2$  のグラフを書くと図 7.1 のようになる ( $f = 50, n = 1.51680$ (BK7-d 線) の場合)。 $1/r_1, 1/r_2$  もグラフに載せているが、 $f_2 = \text{一定}$  であるため、それぞれ  $b_2, a_2$  と比例する。

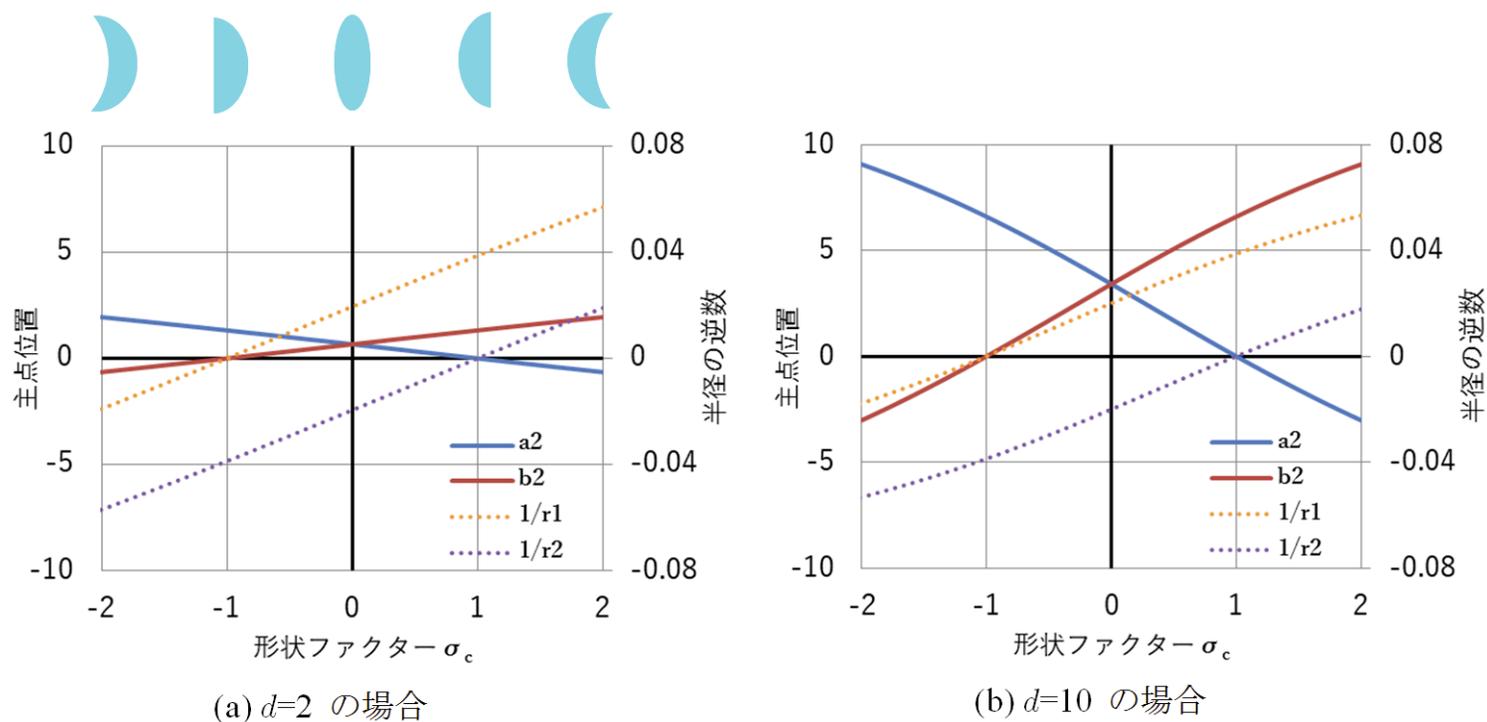


図 7.1 レンズ形状による主点位置の変化 ( $f_2 = 50, n = 1.51680$  の場合)

## 7.2 単レンズの色収差

波長により屈折率が異なる場合の、単レンズの特性を調べる。波長による像のズレを**色収差**という。ここで、次のように定義する。通常の屈折率を  $n_i$ 、異なる波長の屈折率を  $n'_i$  のように波長が異なる場合を「'」をつけて表し、 $\Delta n_i = n'_i - n_i$  のようにその差を「 $\Delta$ 」をつけて表す。

波長が異なる場合の像の出来る位置  $L'_{Z2}$  と像の倍率  $\beta'_2$  は、通常の式の  $n$  を  $n'$  で置き換えることにより計算できる。このときの差  $\Delta\beta_2, \Delta L_{Z2}$  をそれぞれ  $\beta_2, L_{Z2}$  で割って [%] で表すと図 7.2 のようになる ( $f = 50, L_1 + a_2 = 75, n = 1.51680$ (BK7-d 線)、 $n' = 1.52238$ (BK7-F 線) の場合。このとき  $\beta_2 = -2$  となる)。なお、 $f_2$  が一定でも、主点位置  $a_2$  がレンズ形状により変わるため、物体からレンズまでの距離  $L_1$  を一定にすると倍率  $\beta_2$  が変化する。通常波長での  $\beta_2$  を一定にするために、 $f_2$  と  $L_1 + a_2$  を一定にしている。

この条件では、d 線 (587.56nm) と F 線 (486.13nm) でレンズの厚さにかかわらず 3% 以上も像の大きさや位置がズレる。レンズが薄いとレンズ形状によりあまり変わらないが、レンズが厚くなると形状により変化するようになり、 $\Delta\beta_2$  と  $\Delta L_{Z2}$  ではその変化のしかたが変わってくる。像の大きさのズレを**倍率色収差**、像の位置のズレを**軸上色収差**という。

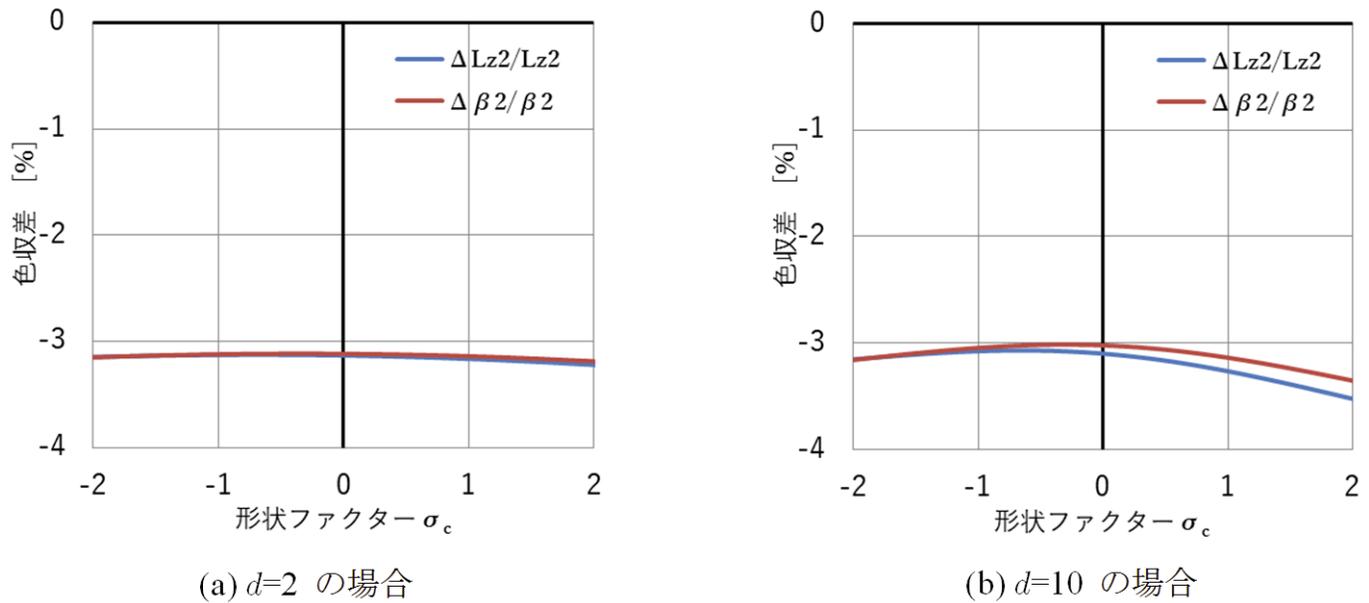


図 7.2 波長による像の倍率、位置ズレの割合 ( $f_2 = 50, L_1 + a_2 = 75, n = 1.51680, n' = 1.52238$  の場合)

### 7.3 単レンズのペッツバール和

近軸近似計算では像面は平面とするが、実際のレンズでは曲面となった界面を通ると像面が湾曲する。ペッツバール和  $P_{SUMi}$  は像面の湾曲に関する量で、

$$P_i = \frac{n_{i+1} - n_i}{n_i n_{i+1} r_i} = -\frac{R_i}{n_i} \tag{7.3}$$

$$P_{SUMi} = P_1 + P_2 + \dots + P_i \tag{7.4}$$

のように表される。

$$\rho_i = -\frac{1}{P_{SUMi}} \tag{7.5}$$

とすると、 $\rho_i$  は光学系全体を通した像の像面（ペッツバール像面）の湾曲の曲率半径を表す（実際にできる像面と完全に一致するわけではない）。 $P_{SUMi} = 0$  のとき、像面は平面となる。単レンズの形状によるペッツバール像面の曲率半径  $\rho_2$  の変化を図 7.3 に示す ( $f_2 = 50, n = 1.5168$  の場合)。

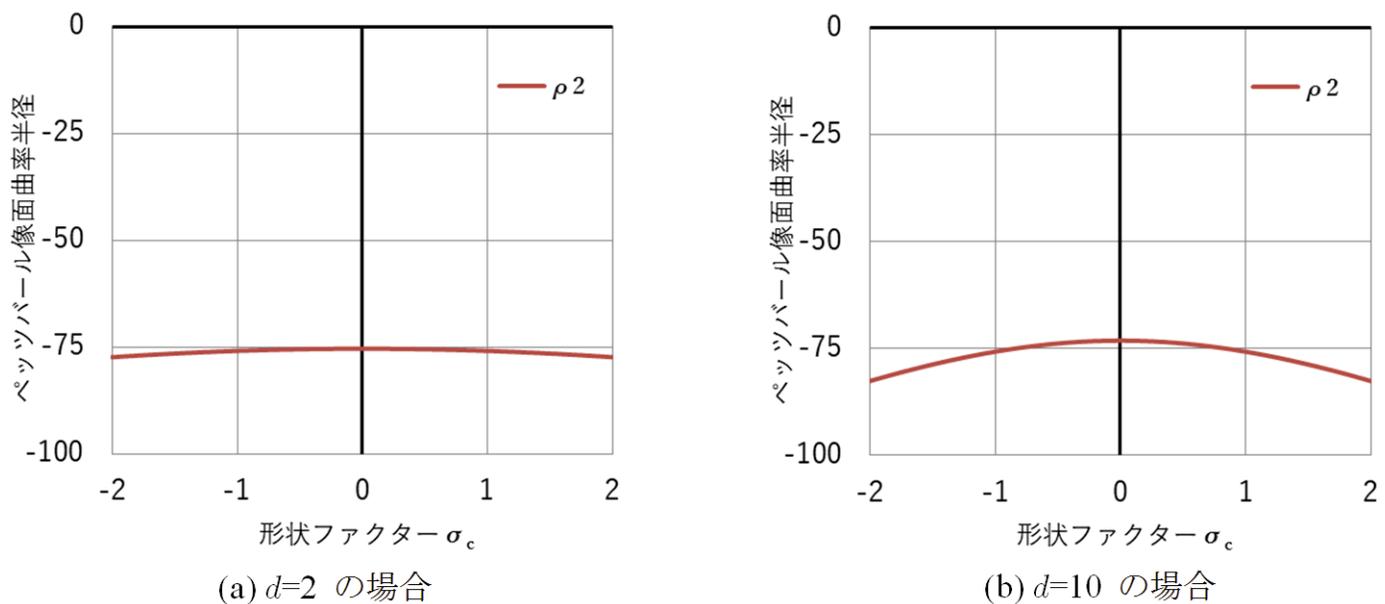


図 7.3 ペッツバール像面の曲率半径 ( $f_2 = 50, n = 1.51680$  の場合)

図 7.3 では、レンズの厚さ  $d$  により  $\rho_2$  すなわちペッツバル和  $P_{SUM2}$  が変わったように見えるが、(7.3)(7.4) 式のようにペッツバル和は  $n$  と  $r$  だけ決まり、 $d$  にはよらない。ここでは  $f_2 = \text{一定}$  としたため、 $d$  によって  $r_1, r_2$  が変わり、それにより  $P_{SUM2}$  も変化した結果である。レンズが薄いときは形状によりあまり変わらないが、厚くなると変化するようになり  $r_1 = -r_2$  の両凸レンズが最も像の湾曲がきつくなる。

なお、単レンズの形状による集束特性の変化では、球面収差等の非常に重要な特性があるが、近軸計算ではないためここでは省く。

## 8 ルーペ・顕微鏡の色収差補正

ルーペ、顕微鏡の色収差補正について検討する。

### 8.1 縦倍率

まず、顕微鏡の色収差補正を検討するために必要な式を導いておく。レンズの基本式 (3.63) より

$$\frac{1}{f_i} = \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{1}{L_1 + a_i} + \frac{1}{b_i + L_{Zi}}$$

$$L_{Zi} = \frac{1}{\frac{1}{f_i} - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{1}{L_1 + a_i}} - b_i \quad (8.1)$$

ここで

$$L_a = L_1 + a_i \quad (8.2)$$

$$L_b = \frac{1}{\left(\frac{1}{f_i} - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{1}{L_a}\right)}$$

とすると、

$$L_b = b_i + L_{Zi} \quad (8.3)$$

これを用い、(3.66) 式より

$$\beta_i = -\left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{b_i + L_{Zi}}{L_1 + a_i} = -\left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{L_b}{L_a} \quad (8.4)$$

となる。次に、光源位置が右方向に微小量  $\Delta L_1$  だけずれたとき ( $L_1$  が小さくなったとき)、像の位置が右方向に  $\Delta L_{Zi}$  だけずれるとすると、(8.1) 式より、

$$L_{Zi} + \Delta L_{Zi} = \frac{1}{\frac{1}{f_i} - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{1}{L_1 - \Delta L_1 + a_i}} - b_i = \frac{1}{\frac{1}{f_i} - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{1}{L_a - \Delta L_1}} - b_i = \frac{1}{\frac{1}{f_i} - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{1}{L_a(1 - \Delta L_1/L_a)}} - b_i$$

ここで、 $|\Delta L_1/L_a| = |\Delta L_1/(L_1 + a_i)|$  が 1 より十分小さいとして、近似式  $1/(1+s) \doteq 1-s$  ( $|s| \ll 1$ ) を用いると

$$L_{Zi} + \Delta L_{Zi} = \frac{1}{\frac{1}{f_i} - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{1 + \Delta L_1/L_a}{L_a}} - b_i = \frac{1}{\frac{1}{f_i} - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{1}{L_a} - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{\Delta L_1}{L_a^2}} - b_i$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{L_b} - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{\Delta L_1}{L_a^2}} - b_i = \frac{L_b}{1 - \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{\Delta L_1 L_b}{L_a^2}} - b_i$$

ここでも、 $|(n_1/n_{i+1})\Delta L_1 L_b/L_a^2|$  が 1 より十分小さいとして近似すると

$$L_{Zi} + \Delta L_{Zi} = L_b \left( 1 + \left( \frac{n_1}{n_{i+1}} \right) \frac{\Delta L_1 L_b}{L_a^2} \right) - b_i = L_b - b_i + \left( \frac{n_1}{n_{i+1}} \right) \frac{\Delta L_1 L_b^2}{L_a^2}$$

(8.3) 式より  $L_b - b_i = L_{Zi}$  なので

$$\Delta L_{Zi} = \left( \frac{n_1}{n_{i+1}} \right) \frac{\Delta L_1 L_b^2}{L_a^2}$$

$$\frac{\Delta L_{Zi}}{\Delta L_1} = \left( \frac{n_1}{n_{i+1}} \right) \frac{L_b^2}{L_a^2}$$

$\Delta L_{Zi}/\Delta L_1$  は縦倍率と呼ばれる量で、これを  $\alpha_i$  とすると、(8.4) 式を用いて、

$$\alpha_i = \frac{\Delta L_{Zi}}{\Delta L_1} = \left( \frac{n_{i+1}}{n_1} \right) \beta_i^2 \tag{8.5}$$

が成り立つ。(  $\Delta L_1$  が小さいとき )

## 8.2 ルーペの角倍率色収差補正

ここではルーペが凸レンズと凹レンズを何枚か組み合わせた複合レンズでできており、色収差を補正する機能を持っているものとする。このとき、色収差をどのように補正すればよいかを検討する。空気中にある複合レンズを一つの隙間のある薄肉レンズとみなす。 $L_1$  以外の界面数を表す添字を省略し、波長が異なる場合を「'」をつけて表し、波長による差を「 $\Delta$ 」をつけて表す。二つの波長での像のでき方を図 8.1 に示す。

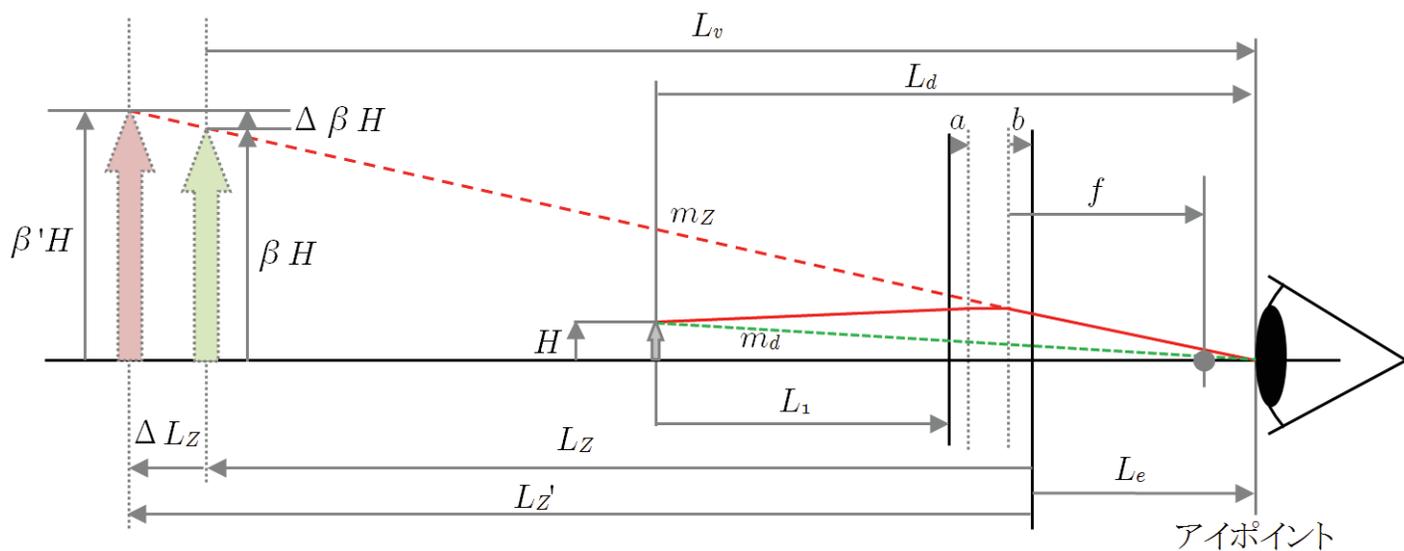


図 8.1 ルーペの近軸光線追跡

図 8.1 からわかるように、 $\beta H / (L_Z - L_e)$  と  $\beta' H / (L'_Z - L_e)$  が等しければ虚像は同じ方向（傾き）で見えることになる（ $H$  は物体の高さ）。虚像を見たとき光線の傾き  $m_Z$  と、物体をそのまま見たときの光線の傾き  $m_d$  の比は傾きによる倍率（角倍率という（JIS の定義とは異なる））となるが、見た目には像の大きさ自体のズレではなく光線の来る方向のズレが問題であるため、角倍率  $\gamma$  の色収差を補正することが重要となる。 $L_d$  を物体から眼までの距離とすると、

$$\gamma = \frac{m_Z}{m_d} \tag{8.6}$$

$$= \frac{\left( -\frac{\beta H}{L_e - L_Z} \right)}{\left( -\frac{H}{L_d} \right)} = \beta \frac{L_d}{L_e - L_Z}$$

$L_v$  を明視距離とすると、 $L_e - L_Z = L_v$  であるから、

$$\gamma = \beta \frac{L_d}{L_v}$$

$\gamma$  の波長による変化量は

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= \gamma' - \gamma = (\beta + \Delta\beta) \frac{L_d}{L_e - (L_z + \Delta L_z)} - \gamma = (\beta + \Delta\beta) \frac{L_d}{L_v - \Delta L_z} - \gamma \\ &= \left(1 + \frac{\Delta\beta}{\beta}\right) \beta \frac{L_d}{L_v \left(1 - \frac{\Delta L_z}{L_v}\right)} - \gamma = \left(1 + \frac{\Delta\beta}{\beta}\right) \frac{\gamma}{1 - \frac{\Delta L_z}{L_v}} - \gamma \\ \frac{\Delta\gamma}{\gamma} &= \left(1 + \frac{\Delta\beta}{\beta}\right) \frac{1}{1 - \frac{\Delta L_z}{L_v}} - 1 \end{aligned}$$

波長の変化による屈折率の変化率は小さいから、それによる  $|\Delta L_z/L_v|$  が 1 より十分小さいとして近似すると

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \left(1 + \frac{\Delta\beta}{\beta}\right) \left(1 + \frac{\Delta L_z}{L_v}\right) - 1 = \frac{\Delta\beta}{\beta} + \frac{\Delta L_z}{L_v} + \frac{\Delta\beta}{\beta} \frac{\Delta L_z}{L_v}$$

微小量の掛け算となる第 3 項は、第 1 項あるいは第 2 項に比べて小さくなるので無視すると次の近似式が得られる。

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{\Delta\beta}{\beta} + \frac{\Delta L_z}{L_v} \tag{8.7}$$

これをゼロにすれば (近づければ)、角倍率色収差が補正できる。図 8.1 からもうすぐわかるように倍率が変化した割合だけ像までの距離を変化させればよいことになる。 $(\beta, L_v$  は正であり、 $\Delta\beta$  が正のとき  $\Delta L_z$  を負にする (負の値である  $L_z$  の絶対値を大きくする))

### 8.3 顕微鏡の角倍率色収差補正

顕微鏡は図 8.2 のように、対物レンズによりできた中間像を接眼レンズにより拡大して見ている。対物レンズによる中間像は反転しているため、そのまま見ると像は倒立する (倍率は負となる)。実体顕微鏡などではポロプリズムなどで途中でもう一度反転させて正立させている。

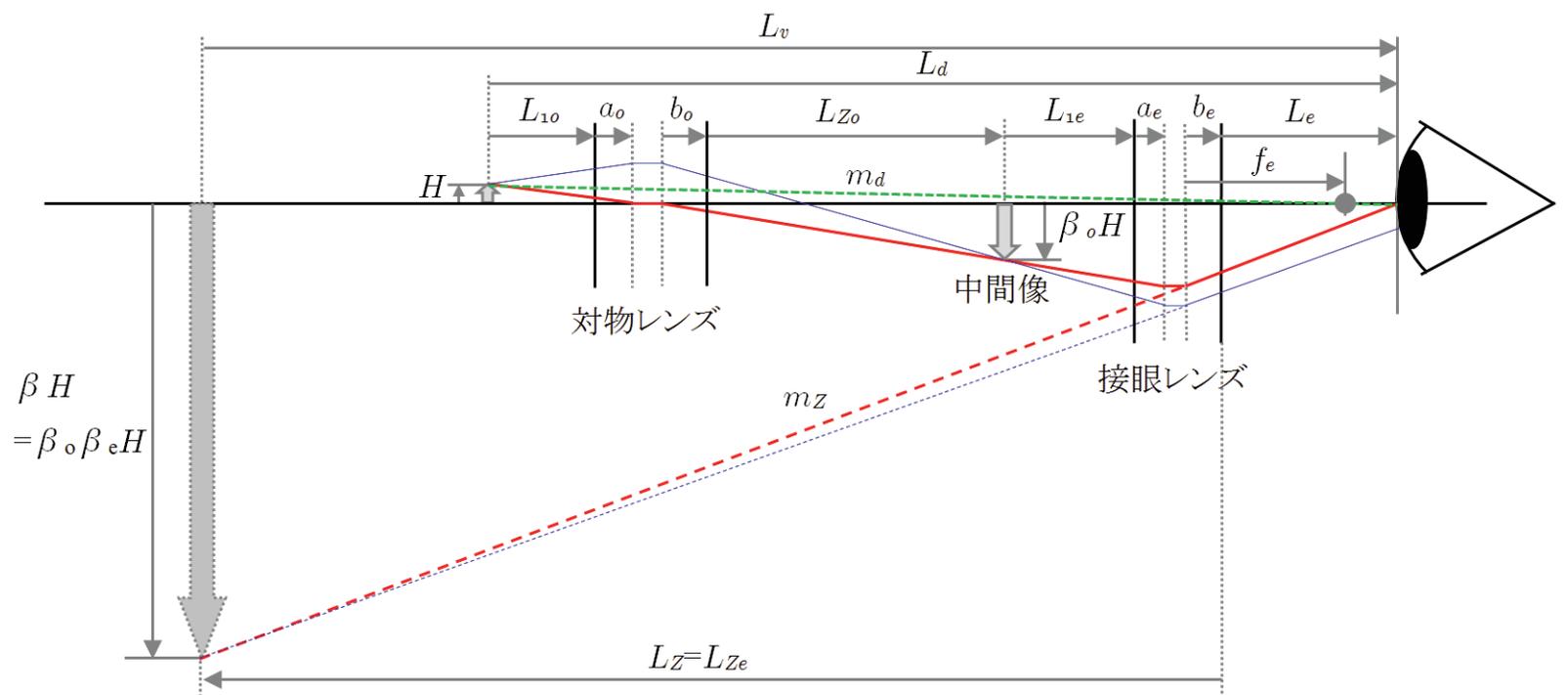


図 8.2 顕微鏡の近軸光線追跡

ここでは、対物レンズの倍率などに関しては添字  $_o$  を、接眼レンズについては添字  $_e$  をつけて表し、全体については何もつけない。全体の倍率と像の位置は

$$\beta = \beta_o \beta_e \tag{8.8}$$

$$L_Z = L_{Ze}$$

となる。先のルーペの場合と同様に角倍率  $\gamma$  は

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{m_Z}{m_d} = \beta \frac{L_d}{L_e - L_Z} \\ &= \beta \frac{L_d}{L_v} \end{aligned} \quad (8.9)$$

ルーペと同じく

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{\Delta\beta}{\beta} + \frac{\Delta L_Z}{L_v} \quad (8.10)$$

と近似される。

ここで、波長により像位置・倍率が変化する要因を対物レンズと接眼レンズに分けて考える。 $\Delta L_Z$  は、接眼レンズの像の位置変化量  $\Delta L_{Ze}$  と、対物レンズの像の位置が変化しそれが接眼レンズの縦倍率で拡大される分の合計で近似される。当然、対物・接眼レンズが両方とも変化した分も考えられるが、これによる追加分は微小量の掛け算になるため無視する。(8.5) 式を用いると次の式で近似できる。

$$\Delta L_Z = \beta_e^2 \Delta L_{Zo} + \Delta L_{Ze} \quad (8.11)$$

$\Delta\beta$  は、接眼レンズの倍率が変化した分、対物レンズの倍率が変化した分、対物レンズにより像位置が変化しそれにより接眼レンズの倍率が変化した分の合計で近似できる。ここでもそれらの組み合わせは無視する。まず、中間像位置の変化による接眼レンズの倍率の変化量  $\Delta\beta_{ep}$  を求める。(3.68) 式より

$$\begin{aligned} L_{1e} &= \left(1 - \frac{1}{\beta_e}\right) f_e - a_e \\ \frac{1}{\beta_e} &= 1 - \frac{L_{1e} + a_e}{f_e} \end{aligned}$$

対物レンズによる中間像位置が  $\Delta L_{Zo}$  変化すると、接眼レンズの  $L_{1e}$  が  $-\Delta L_{Zo}$  だけ変わるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_e + \Delta\beta_{ep}} &= 1 - \frac{L_{1e} - \Delta L_{Zo} + a_e}{f_e} = 1 - \frac{(L_{1e} + a_e)}{f_e} + \frac{\Delta L_{Zo}}{f_e} \\ \frac{1}{\beta_e(1 + \frac{\Delta\beta_{ep}}{\beta_e})} &= \frac{1}{\beta_e} + \frac{\Delta L_{Zo}}{f_e} \end{aligned}$$

$|\Delta\beta_{ep}/\beta_e|$  が 1 より十分小さいとすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_e} \left(1 - \frac{\Delta\beta_{ep}}{\beta_e}\right) &= \frac{1}{\beta_e} + \frac{\Delta L_{Zo}}{f_e} \\ \Delta\beta_{ep} &= -\frac{\Delta L_{Zo} \beta_e^2}{f_e} \end{aligned}$$

となる。これを用い、全体の倍率は対物レンズの倍率と接眼レンズの倍率の掛け算であるから、その変化量は

$$\Delta\beta = \Delta\beta_e \beta_o + \beta_e \Delta\beta_o - \beta_o \frac{\Delta L_{Zo} \beta_e^2}{f_e} \quad (8.12)$$

と近似できる。(8.11)(8.12) 式を (8.10) 式に代入し、(8.8) 式を用いると

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{\beta_o \Delta\beta_e + \Delta\beta_o \beta_e - \beta_o \frac{\Delta L_{Zo} \beta_e^2}{f_e}}{\beta_o \beta_e} + \frac{\beta_e^2 \Delta L_{Zo} + \Delta L_{Ze}}{L_v}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Delta \beta_e}{\beta_e} + \frac{\Delta \beta_o}{\beta_o} - \beta_e \frac{\Delta L_{Zo}}{f_e} + \beta_e^2 \frac{\Delta L_{Zo}}{L_v} + \frac{\Delta L_{Ze}}{L_v} \\
 &= \left( \frac{\Delta \beta_o}{\beta_o} + \beta_e \left( \beta_e - \frac{L_v}{f_e} \right) \left( \frac{\Delta L_{Zo}}{L_v} \right) \right) + \left( \frac{\Delta \beta_e}{\beta_e} + \frac{\Delta L_{Ze}}{L_v} \right)
 \end{aligned}$$

となる。これをゼロにすれば（近づければ）角倍率色収差が補正できる。

第一項は対物レンズに関する項、第二項は接眼レンズに関する項で、接眼レンズについてはルーペの場合と同じであるが、対物レンズの像位置に関しては接眼レンズで決まる係数がかかっている。この係数を  $K_e$  とすると、

$$K_e = \beta_e \left( \beta_e - \frac{L_v}{f_e} \right) \quad (8.13)$$

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \left( \frac{\Delta \beta_o}{\beta_o} + K_e \left( \frac{\Delta L_{Zo}}{L_v} \right) \right) + \left( \frac{\Delta \beta_e}{\beta_e} + \frac{\Delta L_{Ze}}{L_v} \right) \quad (8.14)$$

(3.67) 式より、

$$L_{Ze} = (1 - \beta_e) f_e - b_e$$

$$\beta_e = 1 - \frac{L_{Ze} + b_e}{f_e}$$

であるから、(8.13) 式に代入して

$$K_e = \beta_e \left( 1 - \frac{L_{Ze} + b_e}{f_e} - \frac{L_v}{f_e} \right) = \beta_e \frac{(f_e - L_{Ze} - b_e + L_{Ze} - L_e)}{f_e} = \beta_e \frac{((f_e - b_e) - L_e)}{f_e} \quad (8.15)$$

この式から、アイポイントが接眼レンズの焦点位置より前か後かで  $K_e$  の符号が変わることがわかる。対物レンズでできる中間像から接眼レンズを通過して瞳の中心に入る光線（図 8.2 の赤線）を見てみると、接眼レンズの焦点距離  $f_e$  と倍率  $\beta_e$  は正なので、図 8.2 のように中間像から接眼レンズに向けて光線が広がっている場合は  $K_e$  は負、平行であれば接眼レンズの焦点を通るということであるから  $K_e$  はゼロ、収束していれば  $K_e$  は正となる。技術資料 2016-001「近軸計算シート」の [W-準 SACC 顕微鏡] に、 $K_e$  を用いて色収差補正した顕微鏡の例がある。

なお、JIS(B 7254 : 2007)「顕微鏡-倍率」によると

接眼レンズの倍率は、明視距離と接眼レンズの焦点距離との比で表す。

$$M_E = 250/f_E$$

ここに、

$M_E$ : 接眼レンズの観察倍率

$f_E$ : 接眼レンズの焦点距離 (mm)

250: 明視距離 (mm)

となっているので、表示された値から計算すると、必ず  $K_e = 0$  となるはずである。（四捨五入などにより、ゼロにならない場合がある。）

望遠鏡の光学系は顕微鏡と同様である。通常、 $L_{1o}$  と  $L_{Ze}$  を無限大とみなしている（中間像が対物・接眼レンズの焦点位置にできるとして  $\gamma = -f_o/f_e$  とする）が、実際には無限大ではなく（ $L_{1o}$  は非常に大きな値になり得るが）有限であるから、顕微鏡の式がそのまま使える。

## 8.4 各波長の色収差バランス

色収差は 2 つの波長だけ補正すればよいというものではなく、必要となる波長領域全体でバランスよく収差を小さくする必要がある。

眼の感度は緑 (555nm) が最も高く、波長の長い真紅 (A' 線 768.2nm) や波長の短い紫 (h 線 404.7nm) ではあまり見えなくなること、そして光学ガラスなどの屈折率の波長に対する変化率が長波長（赤色）では小さく短波長（青

色) では大きいこと、しかし眼の中心部に存在する青色光に反応する細胞 (青錐体) の数が赤や緑に反応する細胞 (赤錐体・緑錐体) の数より少なく細かな形状の認識に対する青色の効果が小さいことを考慮すると、一般的には昔から行われてきたように d 線 (587.6nm 橙) を設計波長として C 線 (656.3nm 赤 (d 線との差 68.7nm)) の収差と F 線 (481.6nm 緑青 (d 線との差 106nm)) の収差を同程度になるようにすると比較的バランスよく補正できる。

デジタルカメラで撮影し拡大する場合には青の画素数が赤や緑と同じであるため、青色に対する補正がより重要となる。

図 8.3 に  $f=25.4\text{mm}$  のトリプレットレンズ (エドモンドオプティクス#30-120[2]) を 10 倍ルーペとして用いた場合 (技術資料 2016-001 「近軸計算シート」の [トリプレットルーペ] 参照) の、d 線に対する % で計算した色収差を示す (屈折率は RefractiveIndex.INFO[3] の計算式を用いた)。角倍率の色収差を直接計算した  $\Delta\gamma/\gamma$  と近似式  $\Delta\beta/\beta + \Delta Lz/Lv$  は、ほぼ重なっている。像の大きさや像の位置は % オーダーで変わっているが、角倍率の色収差  $\Delta\gamma/\gamma$  は非常に小さく、短波長より長波長の方が変化の割合が小さい。この例では C 線より F 線の方が角倍率色収差が大きくなっているが、それでも紫 (h 線) で 0.5% 程度である。なお、色収差はレンズの屈折率・形状だけではなく、倍率 (あるいは物体までの距離・アイポイントまでの距離) によっても変化する。

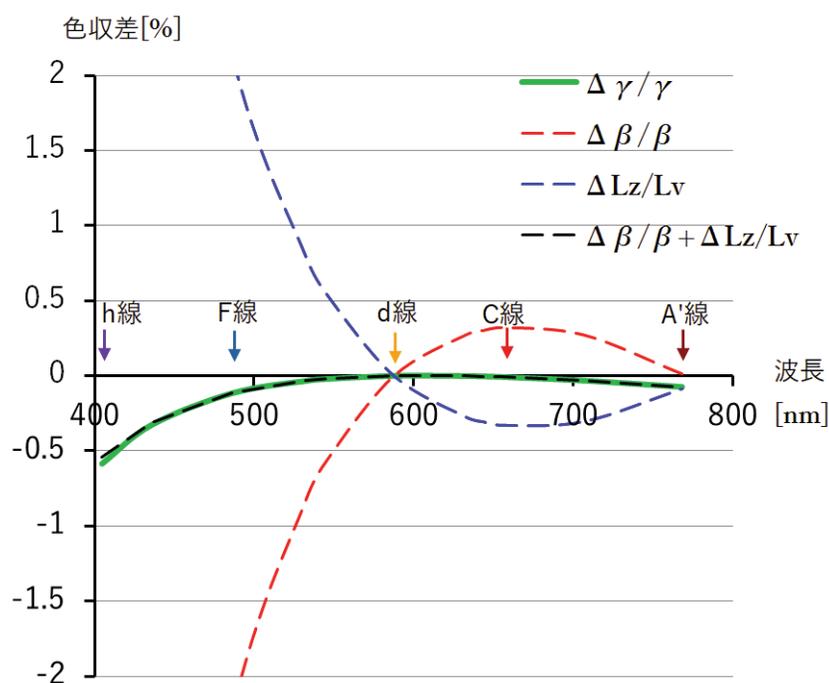
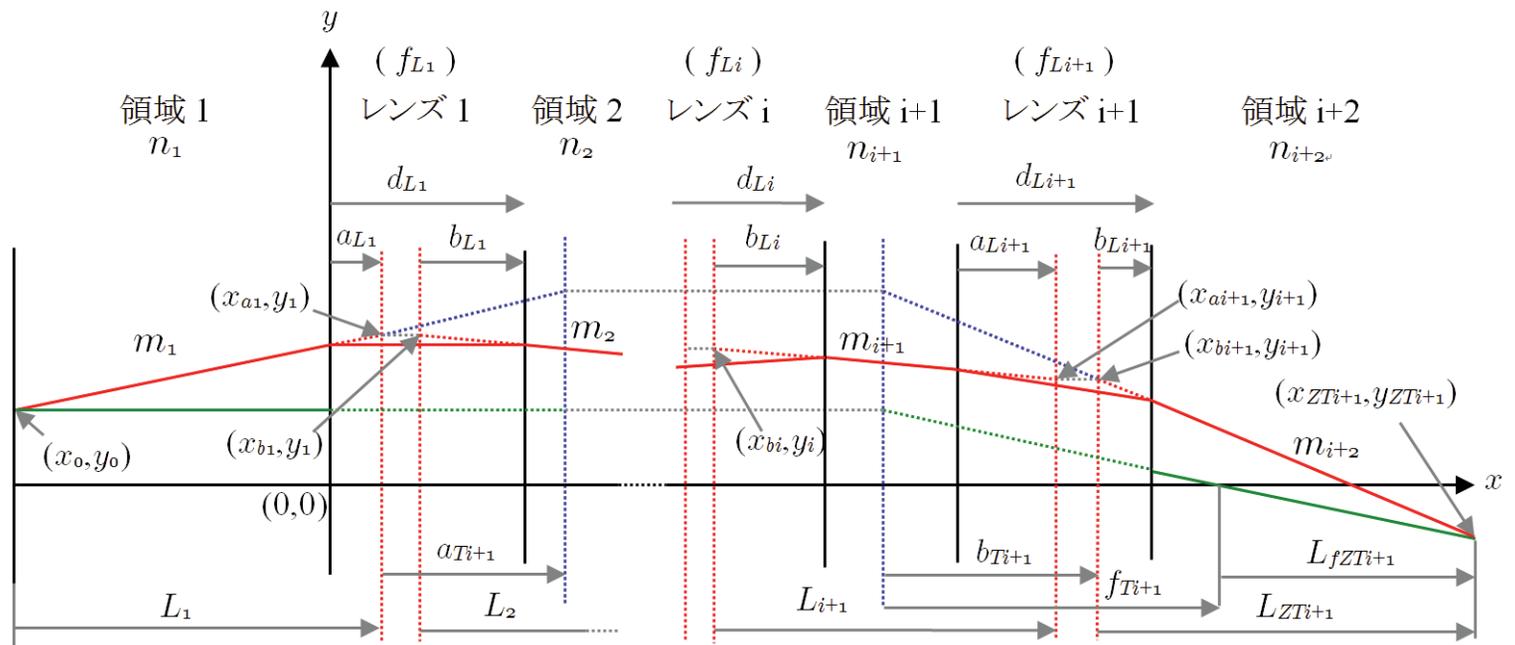


図 8.3 トリプレットルーペの色収差計算例

## 9 複数のレンズ (隙間のある薄肉レンズ) で構成された光学系

複数界面を持つレンズを隙間のある薄肉レンズ (主点と焦点距離で表され薄肉レンズと同じ取り扱いができるレンズ) として表すことが出来たが、この隙間のある薄肉レンズが複数ある場合を検討する。距離  $L_{i+1}$  をレンズ  $i$  の後側主点からレンズ  $i+1$  の前側主点までの距離とすると、薄肉レンズ 1 つを主点間の隙間 (負の場合もある) を無視して 1 つの界面と考え、これまでと同様に扱える。このとき、光線の傾きの変化は各レンズの焦点距離  $f_{Li}$  を用いて表す必要がある。レンズ数が  $i+1$  のとき各変数を図 9.1 のように定義する。添字  $L$  は各レンズの値を表し、 $T$  はレンズ系全体の値を表す。



領域 i+1 における光線の式  $y - y_i = m_{i+1}(x - x_{bi})$

図 9.1 薄肉レンズで表された光学系の近軸光線追跡 (距離は後側主点から次の前側主点まで)

(3.64)(3.53) 式より  $M_i = (n_1/n_{i+1}) - (L_1 + a_i)/f_i$ 、 $F_i = -1/f_i$  であり、(3.29) 式に代入すると  $m_{i+1} = (n_1/n_{i+1} - (L_1 + a_i)/f_i)m_1 - y_0/f_i$  となるが、i 番目のレンズがこの式で表されると考え、 $(x_0, y_0)$  に相当する点が  $(x_{bi-1}, y_{i-1})$  であることから  $n_1, (L_1 + a_i), m_1, y_0$  を、この光学系の領域 i の相当する変数に置き換えると、

$$m_{i+1} = \left(\frac{n_i}{n_{i+1}} - \frac{L_i}{f_{Li}}\right)m_i - \frac{y_{i-1}}{f_{Li}} \tag{9.1}$$

となる。ここで次のように定義する。

$$F_{Li} = -\frac{1}{f_{Li}} \tag{9.2}$$

$$Q_{Li} = L_i F_{Li} \tag{9.3}$$

$$U_{Li} = S_i + Q_{Li} \tag{9.4}$$

また、

$$y_i = L_i m_i + y_{i-1} \tag{9.5}$$

であるから、(9.1) 式は

$$m_{i+1} = (S_i + L_i F_{Li})m_i + F_{Li} y_{i-1} = S_i m_i + F_{Li} (L_i m_i + y_{i-1}) = S_i m_i + F_{Li} y_i \tag{9.6}$$

となり近軸追跡式が得られる。次に、

$$y_i = (L_1 + A_{Ti})m_1 + (B_{Ti} + 1)y_0$$

$$m_{i+1} = M_{Ti}m_1 + F_{Ti}y_0 \tag{9.7}$$

とおく。i = 1 のときは、レンズ 1 に等しいので、

$$A_{T1} = 0$$

$$B_{T1} = 0$$

$$M_{T1} = U_{L1}$$

$$F_{T1} = F_{L1}$$

となる。3.3 と同様に計算すると、(3.36)(3.37)(3.40)(3.41) 式と同様の式が得られる。

$$A_{Ti+1} = A_{Ti} + L_{i+1}M_{Ti}$$

$$B_{Ti+1} = B_{Ti} + L_{i+1}F_{Ti}$$

$$M_{Ti+1} = U_{Li+1}M_{Ti} + F_{Li+1}(L_1 + A_{Ti})$$

$$F_{Ti+1} = U_{Li+1}F_{Ti} + F_{Li+1}(B_{Ti} + 1)$$

ここで

$$b_{Ti+1} = B_{Ti} + \frac{1}{F_{Ti+1}}$$

$$a_{Ti+1} = A_{Ti+1} - M_{Ti+1}b_{Ti+1}$$

とおくと、領域  $i+2$  における光線の式  $y - y_{i+1} = m_{i+2}(x - x_{bi+1})$  は

$$y - ((L_1 + a_{Ti+1})m_1 + y_0) = m_{i+2}(x - (x_{bi+1} - b_{Ti+1})) \quad (9.8)$$

となる。3.3 と同様に計算すると、 $a_{Ti+1}, b_{Ti+1}$  に  $L_1$  は含まれず、 $a_{Ti+1}, b_{Ti+1}$  が主点位置を示すことがわかる。各レンズを薄肉レンズとみなし、その主点間の隙間を無いものとして計算しているため、 $a_{Ti+1}, b_{Ti+1}$  はレンズの界面からではなく、個別レンズの主点位置からの距離である。

入射光が平行光線 ( $m_1 = 0$ ) の場合、界面数  $i$  の場合の全体での焦点距離を  $f_{Ti}$  とすると、 $x = x_{bi+1} - b_{Ti+1} + f_{Ti}$  のとき、 $y = 0$  となるから、(9.7) 式より  $m_{i+2} = F_{Ti+1}y_0$  を (9.8) 式に代入して

$$f_{Ti} = -\frac{1}{F_{Ti}}$$

次に、

$$L_{ZTi} = -(L_1 + a_{Ti})/M_{Ti} - b_{Ti}$$

とおくと、3.3 と同様に

$$y_{ZTi} = \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\frac{y_0}{M_{Ti}}$$

となり、この点に光が集まる（像面である）ことがわかる。したがってレンズ数  $i$  のときの像の倍率  $\beta_{Ti}$  は

$$\beta_{Ti} = \frac{y_{ZTi}}{y_0} = \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\frac{1}{M_{Ti}}$$

また、3.3 と同様に

$$\frac{1}{f_{Ti}} = \left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right)\frac{1}{L_1 + a_{Ti}} + \frac{1}{b_{Ti} + L_{ZTi}} \quad (9.9)$$

$$\beta_{Ti} = -\left(\frac{n_1}{n_{i+1}}\right) \frac{b_{Ti} + L_{ZTi}}{L_1 + a_{Ti}} \quad (9.10)$$

$$L_{fZTi} = -\beta_{Ti} f_{Ti} \quad (9.11)$$

が導かれる。 $L_{fZTi}$  は焦点から像面までの距離である。

このように、第3節で求めた式と同じ形式で表され、第3節の式の変数を

$$R_i \rightarrow F_{Li} = -1/f_{Li}$$

$$U_i \rightarrow U_{Li}$$

$$f_i \rightarrow f_{Ti}$$

$$b_i \rightarrow b_{Ti}$$

$$a_i \rightarrow a_{Ti}$$

$$\beta_i \rightarrow \beta_{Ti}$$

$$L_{Zi} \rightarrow L_{ZTi}$$

のように置き換えると、そのまま使うことができる（曲率半径  $r$  を含む式を除く）。ただし空気中にレンズが並んでいる場合、前側主点と後側主点の間に隙間があるがこれをゼロとみなしており、またどのレンズも前後の屈折率は同じ（空気）であるため、

$$\text{レンズ全長} \neq L_2 + \dots + L_i$$

$$S_1 = S_2 = \dots = S_i = 1$$

であり、各距離は個別レンズの主点位置間の距離であることに注意。

レンズ数 2（空気中）のときの光学系全体の合成焦点距離などは表 9.1 のようになる

表 9.1 レンズ数 2（空気中）のときの合成焦点距離など（個別レンズの主点間距離を含まず）

$$\begin{aligned} -1/f_{T2} &= (F_{L1}U_{L2} + F_{L2}) \\ &= -1/f_{L1} - 1/f_{L2} + L_2/f_{L1}/f_{L2} \\ -b_{T2}/f_{T2} &= F_{L1}L_2 \\ &= -L_2/f_{L1} \\ -a_{T2}/f_{T2} &= F_{L2}L_2 \\ &= -L_2/f_{L2} \\ -L_{ZT2}/\beta_{T2} &= (L_1 + U_{L1}L_2)/(U_{L1}U_{L2} + L_1F_{L2})(1/\beta_{T2}) \\ &= L_1 + L_2 - L_1L_2/f_{L1} \\ 1/\beta_{T2} &= U_{L1}U_{L2} + L_1F_{L2} \\ &= 1 - L_1/f_{T2} - L_2/f_{L2} \end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] レンズ - Wikipedia <http://ja.wikipedia.org/wiki/レンズ> (参照 2016-07-11)
- [2] エドモンドオプティクス <http://www.edmundoptics.jp/optics/optical-lenses/> (参照 2016-07-11)
- [3] RefractiveIndex.INFO <http://refractiveindex.info> (参照 2016-07-11)